L'algorithmique, outil ou fondement en mathématiques

Jacques-Arthur Weil - XLIM, Université de Limoges

12 Novembre 2009

L'algorithmique en classe de seconde ?

- Point de vue d'un enseignant-chercheur, incompétent sur la classe de seconde..
- .. mais expérience de l'enseignement de l'algorithmique, ou avec de l'algorithmique (à l'université).
- Point de vue d'un spécialiste en calcul formel (algorithmique mathématique exacte).

L'algorithmique dans l'enseignement des maths

Éléments d'analyse d'algorithmes

- Correction
- Complexité et évaluation de performances

Quelques principes d'algorithmique mathématique

- Un exemple : multiplication rapide des polynômes
- Principes algorithmiques :
- Diviser pour règner
- Évaluation-interpolation
- Récursivité

L'algorithmique pour un enseignant-chercheur en mathématiques (à l'université)

- Dans la recherche : `http://www.xlim.fr/dmi`
  - Objet de recherche : Calcul numérique (optimisation numérique), Calcul exact (calcul formel, codage, cryptographie).
  - Outil pour la recherche, expérimentation mathématique (papier, crayon, livres, Maple), aide au calcul.
- Dans l'enseignement (Licence, Master) :
  - Objet d'enseignement (surtout en Master).
  - Outil pour l'enseignement (surtout en Licence).

Bien séparer : enseigner un principe algorithmique, ou utiliser des aspects algorithmiques pour faire passer une notion (expérimentation, découverte, etc).

I. Compte-rendu d'expériences d'enseignement

avec des ordinateurs en mathématiques

Apparition d'outils informatiques dans un cours de mathématiques

- Ordinateur comme support à l'enseignement (expérimentation, travaux pratiques).
- Enseigner un algorithme mathématique.
- Enseigner/approfondir des fondements algorithmiques (typage, correction, complexité, etc).

Apparaissent souvent dans cet ordre.

L'algorithmique dans les mathématiques de licence

- L'algorithmique en tant que telle :
  - principalement enseignée dans les cours d'informatiques,
  - quelques cours spécifiques (analyse numérique, arithmétique, etc) d'algorithmique mathématique.
- Travaux pratiques en licence pour découvrir et manipuler des objets mathématiques.
  - L'aspect algorithmique devient `outil` , mais pas `finalité` .
  - Expérimentations et `mise en responsabilité` , travail en groupe. Petits projets.

Expérimentation mathématiques avec des ordinateurs

- L'ordinateur comme `objet transitionel` : se concentrer sur l'écran (plus que sur papier ?) et l'objectif à atteindre.
- Objectif facile à atteindre (satisfaction). Susciter une réflexion critique derrière.
- Aspect algorithmique facile : l'algo. n'est pas `l'objet` , mais `l'outil` (donc ne doit pas être une barrière).
- Construire la séance sur un problème à résoudre : l'ordinateur est un auxilliaire et un `facilitateur` .
- S'affranchir des calculs lourds (faits par la machine) pour mieux évaluer leur but.
- Occasion de séances individualisées.
- Importance de l'interface : nos séances se passent mieux avec Maple qu'avec Scilab parce que l'interface plait mieux aux étudiants. (à retenir dans le choix d'un langage). Familiarité avec le logiciel.

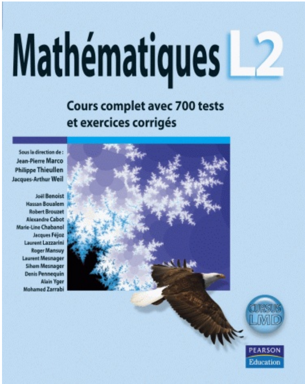
Expérimentation mathématiques : embuches courantes

Ingrédients d'une séance qui se passe mal.

- Difficultés avec la syntaxe : traduire son idée en algorithme puis en syntaxe. (utilité d'être familier avec le logiciel).
- Difficultés avec l'interface (se sentir à l'aise, limiter "l'hostilité de la machine").
- Séances où l'on mêle problème mathématique et difficulté algorithmique : bien séparer les deux (ou alors beaucoup guider).
- Objectif pas clair (but algorithmique ou but mathématique ?), ou trop dur.

II. Un peu d'algorithmique mathématique.

Principes et exemples.



Analyse d'un algorithme : l'algorithme d'Euclide étendu

Algorithme 1 Algorithme d'Euclide étendu

Entrées : $A, B \in \mathbb{N}$

Sorties : le pgcd D et $U, V \in \mathbb{Z}$ tels que $UA + VB = D$.

$R_0 := A$ et $R_1 := B$:

$U_0 := 1,\ U_1 := 0\,;\ V_0 := 0\ :\ V_1 := 1.$

$i := 1\,;$

tant que $R_i \neq 0$ **faire**

- $Q_{i+1} := quo(R_{i-1}, R_i)$, quotient de la division euclidienne
- $R_{i+1} := R_{i-1} - Q_{i+1} R_i$
- $U_{i+1} := U_{i-1} - Q_{i+1} U_i$
- $V_{i+1} := V_{i-1} - Q_{i+1} V_i$
- $i := i + 1$

fin tant que

$i := i - 1\,;$

retourner R_i, U_i, V_i.

Definition

On dit qu'un algorithme est *correct* si les trois conditions suivantes sont remplies :

1. chaque étape est bien définie ;
2. l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes ;
3. le résultat est toujours celui qu'on attend.

Exemple : Euclide étendu est correct.

((difficile de trouver les erreurs : enseignement en soit))

Complexité et évaluation de performances

Mesures de performance :
temps d'exécution et quantité de mémoire nécessaire.

1. `Coût en temps` ,
2. `Coût en mémoire` ,
3. `Coût en nombre d'opérations` .

Évaluation de la *complexité a priori*
vs
évaluation de performances

Exemple : méthode de Horner pour évaluer un polynôme.

Méthode de Horner pour évaluer un polynôme.

Soit un polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ de degré n.
Nombre d'opérations nécessaires au calcul de $P(a)$?

`Méthode naïve` : $3n - 1$ opérations (et n cases mémoire).

`Méthode de Horner` :

$$P(a) = p_0 + a\left(p_1 + a\left(p_2 + a\left(\cdots + a\left(p_{n-1} + ap_n\right)\cdots\right)\right)\right).$$

$f := p_n$ puis, pour i allant de 1 à n, on pose $f := af + p_{n-i}$.
Utilise $2n$ opérations (et une case mémoire).

Dans les deux cas : `coût linéaire` (ordre de grandeur du nombre d'opérations).

Le pivot de Gauss

Méthode du pivot de Gauss pour mettre un système de n équations linéaires à n inconnues sous forme triangulaire.

On ne peut pas calculer le nombre *exact* d'opérations nécessaires.
Mais on peut estimer son `ordre de grandeur :` $\mathcal{O}(n^3)$ (car $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2\,n+1) = \mathcal{O}(n^3)$)

Remarque : le calcul d'un déterminant par la définition est en $\mathcal{O}(n.n!)$, calcul par Gauss en $\mathcal{O}(n^3)$.

Distinguer : complexité *`en moyenne`* et complexité *`dans le pire des cas`* .

Complexité d'Euclide (d'après Lamé, 1845)

Suite de Fibonacci définie par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0.$$

Complexité de l'algorithme d'Euclide `dans le pire des cas` : suite des divisions $n = kq_1 + r_2$, $k = r_2 q_2 + r_3$, $\ldots, r_{i-1} = r_i q_{i+1} + r_{i+1}$. Elle se termine par $r_{m+2} = 0$. Majorer le nombre m d'additions à effectuer.

1. Le pire des cas se présente lorsque les quotients sont tous égaux à 1. Voir que r_i est alors le $(m+2-i)$-ième nombre de Fibonacci F_i défini ci-dessus.
2. Alors $n \geq F_{m+2} = (\phi^{m+2} - (1-\phi)^{m+2})/\sqrt{5}$ (où ϕ nombre d'or).
3. On en déduit $m + 2 \leq \log_\phi(n)$ (donc que l'algorithme d'Euclide est, dans le pire des cas, polynomial en le nombre de chiffres de n).

Quelques principes d'algorithmique mathématique.

Un exemple :
multiplication rapide des polynômes (Karatsuba, 1962)

Algorithme de Karatsuba (1962).

$f, g \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes de degré n ; de combien d'opérations (additions et multiplications) aurons-nous besoin pour calculer le produit $f.g$?

`Cas des polynômes de degré 1` :

si $f = f_0 + f_1 X$ et $g = g_0 + g_1 X$, alors

$$h = f_1\, g_1\, X^2 + (f_0\, g_1 + f_1\, g_0)\, X + f_0\, g_0;$$

`Coût` : une addition et quatre multiplications.

L'astuce de Karatsuba : calculer les *trois* produits $v_0 = f_0 g_0$, $v_1 = (f_0 + f_1)(g_0 + g_1)$, $v_2 = f_1 g_1$.

On a alors $h_0 = v_0$, $h_2 = v_2$, puis $h_1 = v_1 - v_0 - v_2$. On obtient donc le polynôme hg avec trois produits et quatre additions (dont deux soustractions).

Intérêt : le produit est plus coûteux que l'addition !

Algorithme de Karatsuba (suite).

On suppose $n = 2^k$. $f = \sum_{i=0}^{n} f_i X^i$ et $g = \sum_{i=0}^{n} g_i X^i$
$h := fg = \sum_{i=0}^{2n} h_i X^i$

Produit naïf : $\mathcal{O}(n^2)$ opérations.

$$f = F_0 + F_1 X^{\frac{n}{2}} \quad \text{et} \quad g = G_0 + G_1 X^{\frac{n}{2}},$$

F_i, G_i sont des polynômes de degré (au plus) $n/2$

$$h = (F_0 G_0) + X^{\frac{n}{2}} ((F_0 + F_1)(G_0 + G_1) - F_0 G_0 - F_1 G_1) + X^n (F_1 G_1).$$

Ainsi : produit de deux polynômes de degré n en trois produits de polynômes de degré $n/2$, deux additions en degré n et deux additions en degré $n/2$.
Coût par Karatsuba : $\mathcal{O}(n^{1.59})$ (mieux que n^2).

Coût de l'algorithme de Karatsuba.

Proposition

Notons $K(n)$ le nombre de multiplications dans $\mathbb{K}$ nécessaire à la multiplication de deux polynômes par le procédé de Karatsuba. Alors, $K(n) = \mathcal{O}(n^{1.59})$.

Supposons, pour simplifier l'écriture, que $n = 2^k$.
Nous avons vu que $K(n) = 3\mathbb{K}(n/2) = 3\mathbb{K}(2^{k-1})$
d'où, de proche en proche, $K(n) = 3^k\mathbb{K}(1) = 3^{k+1}$.
Or $n = 2^k$, donc $k = \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$ et

$$3^k = e^{k\ln(3)} = e^{\left(ln(n)\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)} = n^{\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)}.$$

Or $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1.59$.

Principes algorithmiques sous-jacents

L'algorithme de Karatsuba met en œuvre trois principes algorithmiques fondamentaux :

1. Diviser pour régner (autre exemple : algorithmes de tri)
2. Évaluation-interpolation
   - évaluer les polynômes f et g en trois « points » (0, 1, et « l'infini »),
   - en déduire l'évaluation du produit fg en ces trois points,
   - puis reconstruire le produit fg à partir de ces trois valeurs

   (autre exemple : calculer modulo des nombres premiers et reconstruire par le théorème des restes chinois).
3. Récursivité.

Un autre exemple d'algorithme récursif : l'exponentiation binaire

Exponentiation binaire : calcul de g^n

Calcul de g^n.
Naïvement, n opérations $(g.g.\dots.g.g)$. Faisons mieux.

Décomposons n en base 2 : $n = n_0 + 2n_1 + 4n_2 + \cdots + 2^k n_k$ où les $n_i \in \{0, 1\}$. Ainsi, g^n peut se réécrire

$$\begin{array}{rcl} g^n & = & g^{n_0} g^{2n_1} g^{4n_2} \dots g^{2^k n_k} \\ & = & g^{n_0} (g^2)^{n_1} (g^4)^{n_2} \dots (g^{2^k})^{n_k} \end{array} .$$

L'élément g^n peut donc être obtenu en multipliant les g^{2^i} tels que $n_i = 1$. Le nombre total d'opérations est donc inférieur à deux fois le nombre de chiffres de n en base 2

Programme récursif pour l'exponentiation binaire.

`ExponentiationBinaire`(n,g) qui calcule g^n pour $n \in \mathbb{N}$

Algorithme 2 ExponentiationBinaire

Entrées : $n \in \mathbb{N}, g$

Sorties : g^n.

si n=0 **alors**
  renvoyer(1)
fin si
$q, r := div(n, 2)$ {division euclidienne : $n = 2q + r$}
$h := ExponentiationBinaire(q, g)^2$
si r=0 **alors**
  renvoyer(h)
sinon
  renvoyer(g.h)
fin si

Algorithme correct. Peut se programmer séquentiellement.

En guise de conclusion ouverte

Finalement, l'algorithmique est (pour moi) parrallèlement un outil `et` un fondement en mathématiques

pour la recherche `et` pour l'enseignement.

Outil très fructueux `et` champs de recherche passionant.