Préparation au Concours Cycle Polytechnicien
Filière universitaire : candidats internationaux
(O.Granier, ITC, du 24 au 29 octobre 2011)

<u>TD corrigés d'Electricité</u>

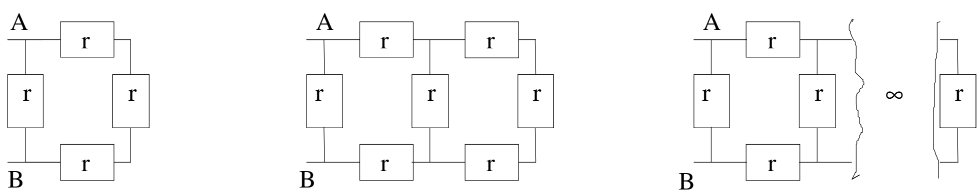
Lois générales – Courant continu

1) Conduction du courant :

Le cuivre a pour masse molaire $M=63{,}54\ g.mol^{-1}$ et pour masse volumique $\rho=8{,}8.10^{3}\ kg.m^{-3}$. Calculer le nombre d'atomes de cuivre par unité de volume. En admettant qu'un atome de cuivre libère un électron de conduction, calculer la vitesse moyenne v de ces électrons correspondant à un courant de 10 A circulant dans un fil de section droite $s=1\ mm^{2}$.

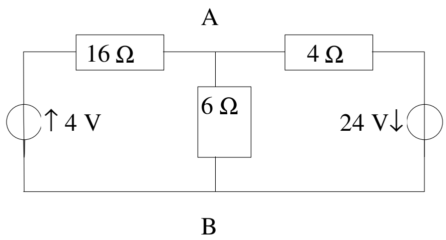
2) Associations de résistances :

On considère les différents circuits représentés sur la figure ci-dessous. Toutes les résistances valent r. Calculer, dans chaque cas, la résistance équivalente entre les points A et B.



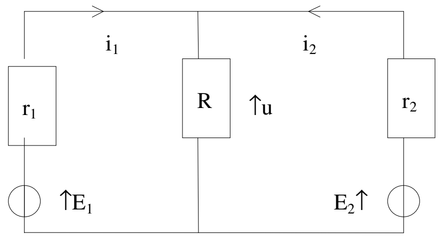
3) Détermination d'intensités :

Calculer l'intensité dans la branche AB du réseau ci-dessous :



4) Générateurs ou récepteurs :

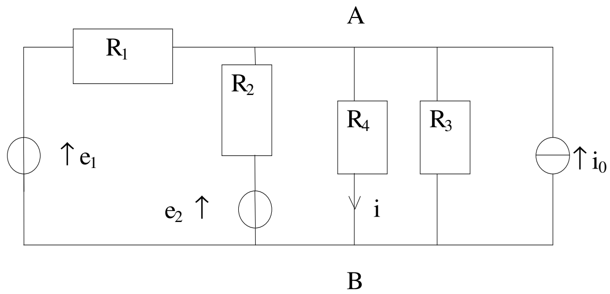
Le circuit ci-contre comprend deux générateurs (G_1) et (G_2) de fém E_1 (positive) et E_2 (signe quelconque) et de résistances internes r_1 et r_2. Ces générateurs sont branchés en parallèle sur la résistance R dont on peut faire varier la valeur.



Déterminer, selon les valeurs de R, le type de fonctionnement (générateur ou récepteur) de chacun des deux générateurs.

5) Générateur de tension et générateur de courant :

On étudie le réseau ci-dessous. Calculer l'intensité i du courant dans la branche AB.



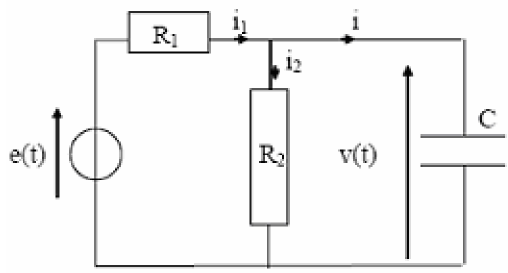
Régimes transitoires

6) Charge d'un condensateur à l'aide d'une source de tension (CCP) :

Pour $t < 0$, le circuit est au repos et $e(t)$ est un échelon d'amplitude E.

a) On s'intéresse à l'état du circuit juste après l'application de la tension E ; déterminer $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$, $i(0^+)$ et $v(0^+)$.

b) On s'intéresse au régime permanent ; déterminer $i_1(\infty), i_2(\infty), i(\infty)$ *et* $v(\infty)$.



c) Etablir l'équation différentielle vérifiée par v(t).

d) Déterminer l'expression de v(t) et représenter graphiquement v(t).

e) On appelle temps de réponse à 5%, $tr_{5\%}$, le temps que met le condensateur pour atteindre 95% de sa charge finale. Calculer $tr_{5\%}$.

f) Faire un bilan énergétique.

Solution :

a) On sait que la tension et la charge d'un condensateur sont des fonctions continues. Par conséquent :

$$v(0^+) = v\left(0^-\right) = 0 \quad ; \quad i_2(0^+) = \frac{v(0^+)}{R_2} = 0$$

La loi des mailles et la loi des nœuds donnent ensuite : $i_1(0^+) = i(0^+) = \dfrac{E}{R_1}$

b) En régime permanent, i = 0, alors : $i_1(\infty) = i_2(\infty) = \dfrac{E}{R_1 + R_2}$ *et* $v(\infty) = R_2 i_2(\infty) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$

c-d) En transformant le générateur de tension par un générateur de courant et en regroupant ensuite les résistances en parallèle, on se ramène, grâce à une nouvelle transformation en modèle de Thévenin, à un circuit série alimenté par un générateur de fem $E_{éq} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$ en série avec une résistance $R_{éq} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

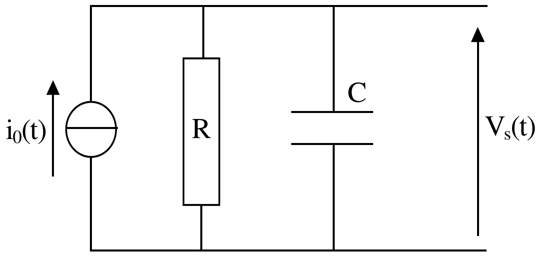
La tension aux bornes du condensateur est alors : $v(t) = E_{éq}(1 - e^{-t/R_{éq}C})$

e) Pour calculer $tr_{5\%}$, on écrit que : $q(tr_{5\%}) = Cv(tr_{5\%}) = CE_{éq}(1 - e^{-tr_{5\%}/R_{éq}C}) = 0{,}95 CE_{éq}$

Soit : $e^{-tr_{5\%}/R_{éq}C} = 0{,}05 \quad d'où \quad tr_{5\%} = R_{éq} C \ln(20)$

f) Le bilan énergétique s'écrit : $\int_0^\infty E i_1(t)dt = \dfrac{1}{2} C v(t)^2 + \int_0^\infty R_1 i_1^2(t)dt + \int_0^\infty R_2 i_2^2(t)dt$

7) Détecteur de particules :



Un dispositif destiné à détecter des particules ionisantes se comporte, sous l'effet de l'une de ces particules, comme un générateur de courant dont le courant électromoteur (ou de court-circuit) est $i_0(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$. Ce dispositif est connecté à un circuit RC dont la constante de temps $RC = k\tau$, où k est une constante positive réelle (voir la figure) :

a) Ecrire l'équation différentielle à laquelle obéit la tension v_s aux bornes du condensateur.

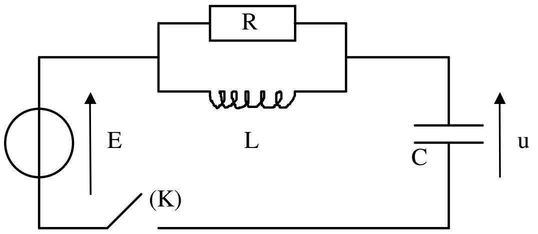
b) Lorsque le condensateur est initialement déchargé, montrer que la tension $v_s(t)$ est donnée par la relation :

$$v_s(t) = ARI_0\left(\exp(-\frac{t}{\tau}) - \exp(-\frac{t}{k\tau})\right)$$

Donner l'expression de A en fonction de k.

8) Régime transitoire dans un circuit RLC :

On considère le circuit représenté ci-dessous. En prenant pour l'instant initial celui de la fermeture de l'interrupteur (K), étudier la tension u(t) aux bornes du condensateur C pour les valeurs :



$E = 2$ V ; $R = 10\ \Omega$; $C = 10^{-6}$ F ; $L = 10^{-3}$ H

Calculer u pour $t = 10^{-5}$ s.

9) Oscillateur à relaxation :

Le montage étudié comporte un condensateur C, un générateur de fém constante E et de résistance interne R, un interrupteur parfait (K) ainsi qu'un « éclateur ».

Le fonctionnement de l'éclateur est décrit par sa caractéristique tension-courant, qui fait apparaître quatre parties. Lorsque la tension u croît à partir d'une valeur inférieure à sa tension d'amorçage U_a, l'éclateur se comporte comme un circuit ouvert : le courant i est nul (segment [O,A]). Dès que u atteint la valeur U_a, l'éclateur devient conducteur : il laisse passer un courant d'intensité i_a (« saut » [A,A']). Ensuite, si la tension décroît, il se comporte comme un dipôle passif de résistance r (segment [A',E']). La tension peut ainsi décroître jusqu'à la valeur d'extinction U_e de l'éclateur, pour laquelle il redevient isolant (« saut » [E'E]).

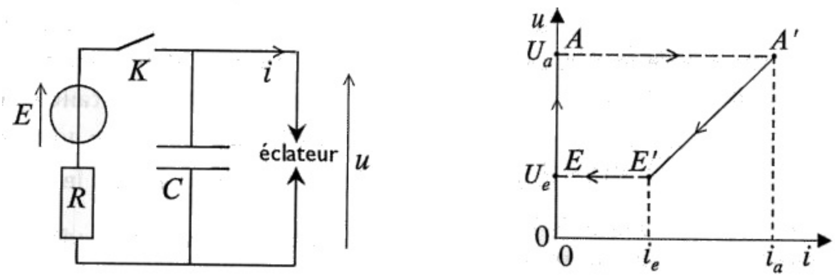


Schéma du circuit étudié (à gauche) et caractéristique de l'éclateur (à droite)

On admet que « les sauts » sont instantanés et qu'ils sont impossibles en sens inverse. Au point E de la caractéristique, l'éclateur ne peut redevenir conducteur à tension constante et au point A' il ne peut redevenir isolant à tension constante.

1) Le condensateur étant initialement déchargé, on ferme à t = 0 l'interrupteur (K).

a) Montrer que, juste après la fermeture de (K), l'éclateur se comporte comme un circuit ouvert.

b) Déterminer, dans l'hypothèse où l'éclateur se comporte toujours comme un circuit ouvert, la valeur de u(t) en régime permanent.

c) Quelle valeur E_{min} faut-il donner à E pour que u(t) atteigne la valeur d'amorçage ?

2) On suppose désormais que $E > E_{min}$.

a) Ecrire et résoudre l'équation différentielle satisfaite par u(t) tant que l'éclateur ne s'amorce pas.

b) Exprimer l'instant t_a auquel l'éclateur devient conducteur ainsi que les valeurs de u et de i à cet instant.

3) Etude de la phase de conduction de l'éclateur.

a) Dans la phase qui suit l'amorçage, donner le circuit équivalent au montage avec le nouveau fonctionnement de l'éclateur.

b) Déterminer la condition portant sur E, R, r et U_e pour que l'intensité du courant dans l'éclateur puisse s'annuler.

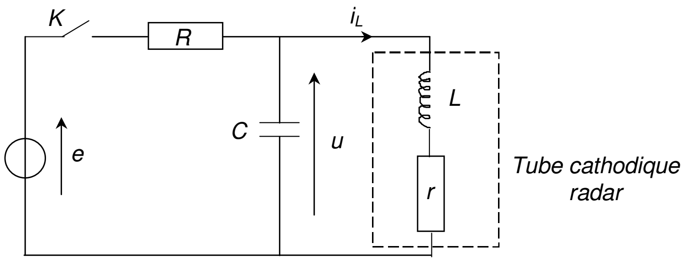
c) Cette condition étant réalisée, établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par u(t) et, après l'avoir intégrée, déterminer l'instant t_e pour lequel le courant dans l'éclateur s'annule.

4) Décrire l'évolution ultérieure à t_e. Représenter graphiquement u(t).

5) on donne E = 500 V, U_a = 450 V, U_e = 150 V, R = 100 Ω, r = 10 Ω et C = 1 µF. En régime établi, calculer la période de la tension u(t).

10) Régime transitoire en électricité, étude électrique d'un radar :

Le circuit de déviation magnétique d'un tube cathodique radar (d'inductance L et de résistance r) est attaqué par un générateur de fém e. A l'instant t = 0, $u(0^-) = 0$, $i_L(0^-) = 0$ et on ferme l'interrupteur (K).



1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i_L. Sachant que $rC << L/R$ et $r << R$, mettre cette équation sous la forme :

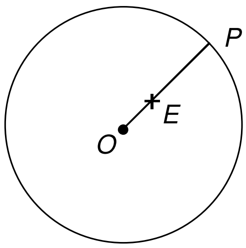
$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\sigma\omega_0 \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = \frac{\omega_0^2 e}{R}$$

Exprimer σ et ω_0 en fonction de R, L et C.

2. Donner la relation entre R, L et C pour que la solution de l'équation avec un second membre nul corresponde au régime apériodique critique, soit $i_L = (at + b)e^{-\omega_0 t}$. Cette condition est supposée satisfaite dans la suite de l'exercice.

3. La tension délivrée par le générateur est de la forme $e(t) = \alpha t + \beta$. Etablir la relation entre α, β, L, R et C pour que l'intensité puisse s'écrire $i_L = Dt(1 - e^{-t/\tau})$. Quelles sont les valeurs de D et de τ ? Tracer la courbe représentative de i_L (t).

4. On donne L = 45 mH, r = 25 Ω. On admet que $e^{-t/\tau} << 1$ dès que $t > 5\tau$. L'émission de l'onde radar et le départ du spot sont simultanés. Le spot se déplace de O en P proportionnellement à i_L. L'onde radar se déplace à la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3.10^{8}$ m.s^{-1}. L'écho E apparaît comme un point brillant sur le rayon OP.

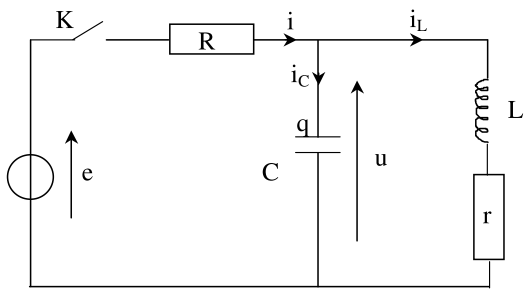


Montrer que la mesure de OP n'est proportionnelle à la distance de l'objectif qu'à partir d'une certaine distance d_0. Calculer la valeur de la capacité C pour avoir d_0 = 2 250 m. En déduire R. Vérifier que les approximations faites à la question (1) sont justifiées.

Solution :

1. Avec les notations de la figure ci-dessous, on peut écrire les équations suivantes :

$$e = Ri + \frac{q}{C} \quad ; \quad e = Ri + L\frac{di_L}{dt} + ri_L \quad ; \quad i_C = \frac{dq}{dt} \quad ; \quad i = i_C + i_L$$



Par conséquent : $i = \frac{1}{R}\left(e - ri_L - L\frac{di_L}{dt}\right) \quad ; \quad i_C = \frac{d}{dt}(Ce - RCi) = C\frac{de}{dt} - C\left(\frac{de}{dt} - r\frac{di_L}{dt} - L\frac{d^2 i_L}{dt^2}\right)$

En remportant dans l'expression de la loi des nœuds, il vient : $LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}+\left(rC+\frac{L}{R}\right)\frac{di_L}{dt}+\left(1+\frac{r}{R}\right)i_L=\frac{e}{R}$

En supposant que rC << L / R et r << R, l'équation précédente se simplifie :

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}+i_L=\frac{e}{R} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 i_L}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}i_L=\frac{1}{LC}\frac{e}{R}$$

Si l'on pose $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $2\sigma\omega_0=\frac{1}{RC}$, soit $\sigma=\frac{1}{2RC\omega_0}=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, alors : $\frac{d^2 i_L}{dt^2}+2\sigma\omega_0\frac{di_L}{dt}+\omega_0^2 i_L=\frac{\omega_0^2 e}{R}$

2. La solution de l'équation précédente avec un second membre nul correspond au régime apériodique critique si le discriminant Δ de l'équation caractéristique associée, soit $r+2\sigma\omega_0 r+\omega_0^2=0$, est nul. La condition $\Delta=4\omega_0^2(\sigma^2-1)=0$ conduit alors à un facteur d'amortissement σ = 1. Par conséquent, $2R=\sqrt{L/C}$.

3. L'équation différentielle à résoudre est alors : $\frac{d^2 i_L}{dt^2}+2\omega_0\frac{di_L}{dt}+\omega_0^2 i_L=\frac{\omega_0^2}{R}(\alpha t+\beta)$

La solution de cette équation est de la forme $i_L=(at+b)e^{-\omega_0 t}+i_{L,p}$, où $i_{L,p}$ est une solution particulière de l'équation précédente, que l'on cherche sous une forme semblable au second membre, c'est-à-dire de la forme $i_{L,p}=xt+y$, où x et y sont des constantes à déterminer en écrivant que cette fonction est solution de l'équation précédente, soit :

$$2\omega_0(x)+\omega_0^2(xt+y)=\frac{\omega_0^2}{R}(\alpha t+\beta)$$

Soit, en identifiant : $x=\frac{\alpha}{R}$ et $y=\frac{1}{R}\left(\beta-\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)$. Ainsi, l'expression de i_L devient :

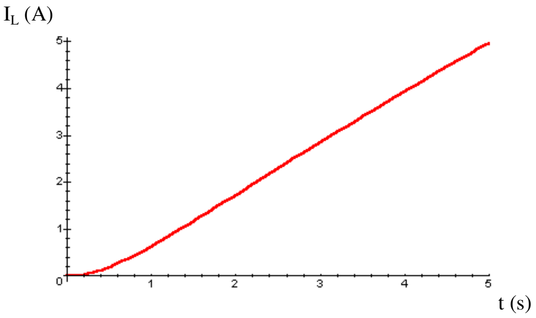
$$i_L=(at+b)e^{-\omega_0 t}+\frac{\alpha}{R}t+\frac{1}{R}\left(\beta-\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)$$

A l'instant $t=0^+$, $i_L(0^+)=0$ (continuité du courant dans une bobine) et $u(0^+)=0$ (continuité de la charge d'un condensateur). Par conséquent, la tension aux bornes de la bobine est également nulle, soit $(di_L/dt)(0^+)=0$. Ces deux conditions initiales sur le courant i_L permettent alors de déterminer les constantes d'intégration a et b :

- $i_L(0^+)=0$ conduit à $b+\frac{1}{R}\left(\beta-\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)$.
- $\frac{di_L}{dt}(0^+)=0$ conduit à $a-b\omega_0+\frac{\alpha}{R}=0$.

On en déduit $b = -\frac{1}{R}\left(\beta - \frac{2\alpha}{\omega_0}\right)$ et $a = -\frac{\omega_0}{R}\left(\beta - \frac{2\alpha}{\omega_0}\right) - \frac{\alpha}{R} = -\frac{\omega_0}{R}\left(\beta - \frac{\alpha}{\omega_0}\right)$. Le courant i_L s'exprime finalement sous la forme : $i_L = -\frac{\omega_0}{R}\left(\beta - \frac{\alpha}{\omega_0}\right) t\, e^{-\omega_0 t} + \frac{\alpha}{R} t + \frac{1}{R}\left(\beta - \frac{2\alpha}{\omega_0}\right)(-e^{-\omega_0 t} + 1)$

Le courant sera alors de la forme $i_L = Dt(1 - e^{-t/\tau})$ si $\beta = 2\alpha / \omega_0$, en posant $D = \alpha / R$ et $\tau = 1/\omega_0$. La courbe représentative de $i_L(t)$ est donnée ci-dessous : (on a choisi arbitrairement : $\tau = 1\,s$ et $D = 1\,A.s^{-1}$)

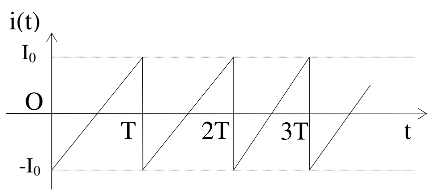


4. Le temps mis par l'onde radar pour parcourir la distance d est $t = d/c$. Par conséquent, le courant i_L peut s'écrire $i_L = Dd(1 - e^{-d/\tau c})/c$ et ne sera proportionnel (tout comme le rayon OP) à la distance parcourue d que si $e^{-d/\tau c} << 1$, soit, avec la convention proposée dans l'énoncé, $d \geq d_0 = 5\tau c$. Si $d_0 = 2\,250\,m$, alors $\tau = d_0 / 5c = 1{,}5.10^{-6}\,s$, ce qui correspond à une capacité $C = \tau^2 / L = 5.10^{-11}\,F$. La résistance R vaut alors $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = 15\,k\Omega$. On vérifie bien que $r << R$ et que $rC = 1{,}25.10^{-9}\,s << \frac{L}{R} = 3.10^{-6}\,s$.

Régime sinusoïdal – Filtres linéaires passifs

11) Courant en dents de scie :

On considère $i = f(t)$ donnée par la courbe ci-contre. Calculer l'intensité moyenne et l'intensité efficace de ce courant en dents de scie.



12) Etude d'un circuit (RLC) :

On dispose d'un condensateur de capacité C = 20 µF, d'une bobine de résistance R = 10 Ω et de coefficient d'auto-inductance L = 0,3 H, d'un générateur BF délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace 100 V et de fréquence f = 50 Hz.

Calculer l'intensité du courant et son déphasage par rapport à la tension quand on applique la tension successivement :

a) Aux bornes du condensateur.

b) Aux bornes de la bobine.

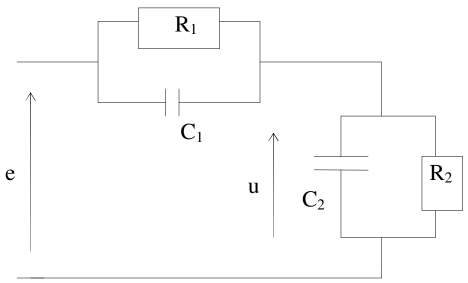
c) A l'ensemble condensateur-bobine en série.

d) A l'ensemble condensateur-bobine en parallèle.

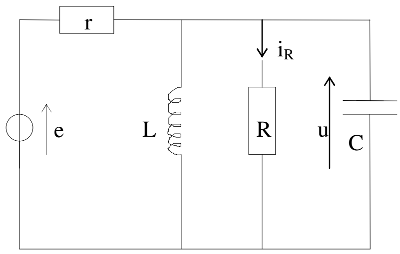
13) Diviseurs de tensions et de courants :

a) Calculer le rapport u / e du circuit (a). Quelles sont ses valeurs limites quand $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$? Quelle relation doivent vérifier R_1, R_2, C_1 et C_2 pour que ces limites soient identiques ? Que devient alors l'expression de u / e ?

b) Transformer le générateur de tension (e,r) du schéma (b) en un générateur de courant puis calculer le courant i_R. Que valent i_R.et φ_R.(déphasage de i_R par rapport à e) pour $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$?



Circuit (a)



Circuit (b)

14) Admittance et puissance :

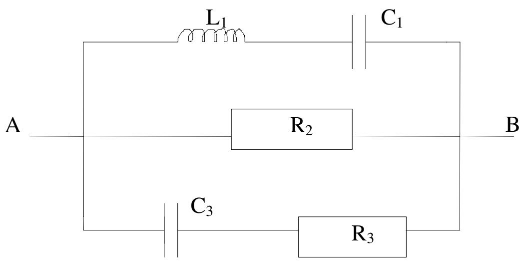
La figure donne la composition d'un dipôle tel que :

$$C_1 = 2\ \mu F \quad ; \quad L_1 = 40\ \mu H \quad ; \quad R_2 = 5\ \Omega \quad ; \quad C_3 = 4\ \mu F \quad ; \quad R_3 = 0{,}2\ \Omega$$

Il est alimenté par un courant sinusoïdal de fréquence f = 120 kHz et la tension efficace aux bornes A et B du dipôle est U_e = 12 V. On demande de calculer :

a) L'admittance complexe $\underline{Y}$ du dipôle.

b) Les valeurs efficaces des intensités dans les trois branches.



c) La puissance dissipée dans le dipôle (deux méthodes sont demandées).

15) Facteur de puissance :

Une installation électrique est alimentée sous une tension efficace $U_e = 200$ V.

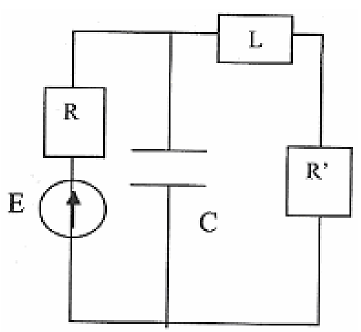
Elle consomme une puissance P = 12 kW. La fréquence est f = 50 Hz et l'intensité efficace 80 A.

a) Sachant que cette installation est du type inductif, calculer la résistance R et l'inductance propre L qui, placées en série et avec la même alimentation, seraient équivalentes à l'installation.

b) Calculer la capacité C à placer en parallèle sur l'installation pour relever le facteur de puissance à la valeur 0,9.

16) Adaptation d'impédances :

L'impédance du générateur est une résistance pure R. Le dipôle d'utilisation est une résistance R '(différente de R). Pour disposer de la puissance maximale, on intercale entre le générateur et R' un quadripôle d'adaptation formé d'un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L.



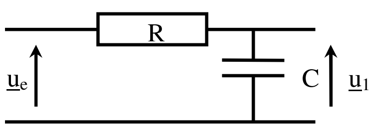
1) Déterminer les valeurs de L et de C qui rendent maximale la puissance consommée dans R.

2) Est-ce possible dans les deux cas R' < R et R' > R ? Sinon, proposer un autre quadripôle.

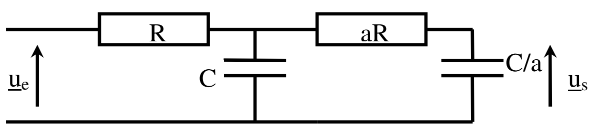
3) Pourquoi ne pas prendre un quadripôle d'adaptation formé de deux résistances ?

17) Association de cellules (R,C) :

a) Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_1 = \underline{u}_1 / \underline{u}_e$ pour le circuit (a), en fonction de ω et de la pulsation de référence $\omega_0 = 1 / RC$.



Circuit (a)



Circuit (b)

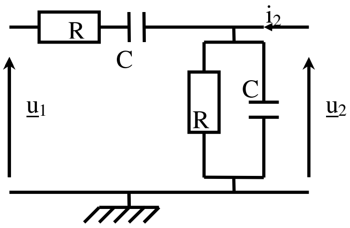
b) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{u}_s / \underline{u}_e$ pour le montage (b), en fonction de ω, ω_0 et a (constante positive réglable).

18) Filtres de Wien, de Colpitts et de Hartley :

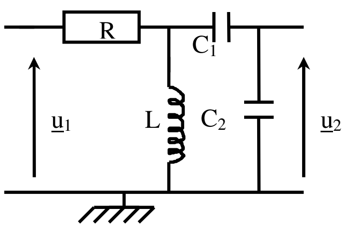
a) Etablir la fonction de transfert du filtre de Wien (figure (a)) utilisé en sortie ouverte ($i_2 = 0$) et la présenter sous la forme normalisée pour un filtre du second ordre. Préciser notamment la nature du filtre, le facteur de qualité Q et le coefficient d'amortissement σ.

b) Mêmes questions pour le filtre de Colpitts (figure (b)) et pour le filtre de Hartley (figure (c)).

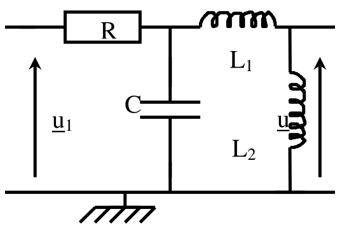
c) Tracer le diagramme asymptotique de ces trois filtres.



Circuit (a)



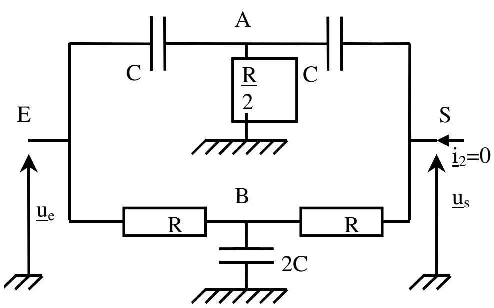
Circuit (b)



Circuit (c)

19) Filtre passif réjecteur de bande :

On considère le filtre ci-contre utilisé en sortie ouverte ($i_2 = 0$).



a) Déterminer sa fonction de transfert $\underline{H} = \underline{u}_s / \underline{u}_e$. Quelle est la nature de ce filtre ?

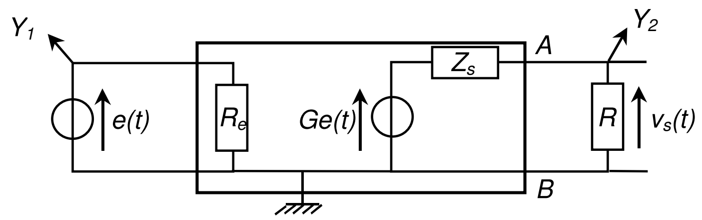
b) Donner son diagramme de Bode. Démontrer que la courbe de gain est symétrique par rapport à l'axe des gains et que la courbe de réponse en phase est symétrique par rapport à l'origine.

c) On désire charger ce filtre par une utilisation d'impédance complexe $\underline{Z}_u$ et lui conserver la même fonction de transfert. Comment peut-on procéder ?

Régime sinusoïdal – Filtres linéaires actifs

20) Amplificateur de chaîne Hi-fi :

Un amplificateur de chaîne hi-fi peut être modélisé par le schéma électrique suivant, dans lequel la résistance d'entrée R_e sera considérée comme infinie :



On réalise pour cela les deux essais suivants :

• Essai n°1 : e(t) = E cos (2πft), R = 16 Ω, valeur efficace de e(t), 1 mV. On mesure avec un oscilloscope numérique une valeur efficace en sortie égale à 0,67 V.

• Essai n°2 : e(t) = E cos (2πft), R = 8 Ω, valeur efficace de e(t), 1 mV. On mesure alors une valeur efficace en sortie égale à 0,5 V.

De plus, on constate que, lors de chaque essai, les deux signaux de sortie gardent, quelle que soit la fréquence, la même valeur efficace et sont en phase avec e(t).

a Déterminer le gain à vide G et l'impédance de sortie complexe $\underline{Z}_s$.

b L'amplificateur étant alimenté par une tension e(t) = E cos (2πft), quelle doit être la résistance de charge R pour qu'il fournisse le maximum de puissance moyenne à tension d'entrée d'amplitude E constante ?

Solution :

➢ a. On pose, en notation complexe et en notant E_e et $V_{s,e}$ les valeurs efficaces des tensions d'entrée et de sortie et φ le déphasage de v_s par rapport à e :

$$\underline{e}(t) = E_e\sqrt{2}\exp(j2\pi ft) \qquad \text{et} \qquad \underline{v}_s(t) = V_{s,e}\sqrt{2}\exp(j(2\pi ft + \varphi))$$

La règle du diviseur de tension donne :

$$\underline{v}_s = \frac{R}{R + \underline{Z}_s} G\underline{e}$$

En posant $\underline{Z}_s = R_s + jB_s$, où les parties réelle et imaginaire R_s et B_s dépendent *a priori* de la fréquence, la valeur efficace de la tension de sortie peut s'écrire :

$$V_{s,e} = \frac{R}{\sqrt{(R + R_s)^2 + B_s^2}} GE_e \qquad \text{(avec de plus : } \tan\varphi = -\frac{B_s}{R + R_s}\text{)}$$

Le déphasage entre v_s et e étant nul quelle que soit la fréquence, on déduit $B_s = 0$ et :

$$V_{s,e} = \frac{R}{R + R_s} GE_e$$

Comme la valeur efficace $V_{s,e}$ ne dépend pas de la fréquence, l'impédance de sortie de la chaîne hi-fi est donc finalement réelle et équivalente à une seule résistance R_s de valeur constante, indépendante de la fréquence.

Les essais effectués avec deux valeurs de la résistance R conduisent alors au système de deux équations suivant :

$$(16 + R_s)0{,}67 = 16.10^{-3}G \qquad \text{et} \qquad (8 + R_s)0{,}5 = 8.10^{-3}G \qquad (\text{avec } R_s \text{ en } \Omega)$$

dont la résolution donne : $R_s = 8\,\Omega$ et $G = 10^3$.

➢ b. La puissance électrique moyenne reçue par la résistance de charge vaut :

$$P=\frac{1}{R}V_{s,e}^2=\frac{R}{(R+R_s)^2}G^2E_e^2$$

Elle sera extrémale, à E_e, G et R_s donnés (caractéristiques de l'amplificateur) lorsque $dP/dR=0$. Or :

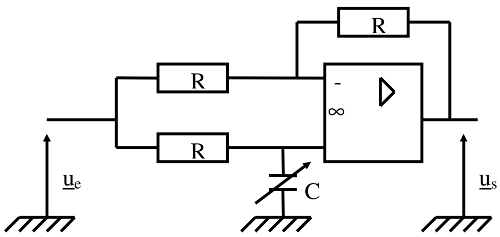
$$\frac{dP}{dR}=G^2E_e^2\frac{(R+R_s)^2-2R(R+R_s)}{(R+R_s)^4}=G^2E_e^2\frac{R_s-R}{(R+R_s)^3}$$

Par conséquent, $dP/dR=0$ pour $R=R_s$. La puissance est alors effectivement maximale et vaut $P_{max}=P(R_s)=G^2E_e^2/4R_s$. La résistance de charge est dite adaptée à la résistance de sortie de la chaîne hi-fi et l'on parle d'adaptation des résistances.

Remarque : si l'amplificateur avait eu une impédance complexe de sortie $\underline{Z}_s$, l'impédance adaptée $\underline{Z}$ de la charge placée en sortie aurait alors été telle que $\overline{\underline{Z}}=\underline{Z}_s$ (c'est-à-dire, mêmes parties réelles mais parties imaginaires opposées).

21) Déphaseur du premier ordre :

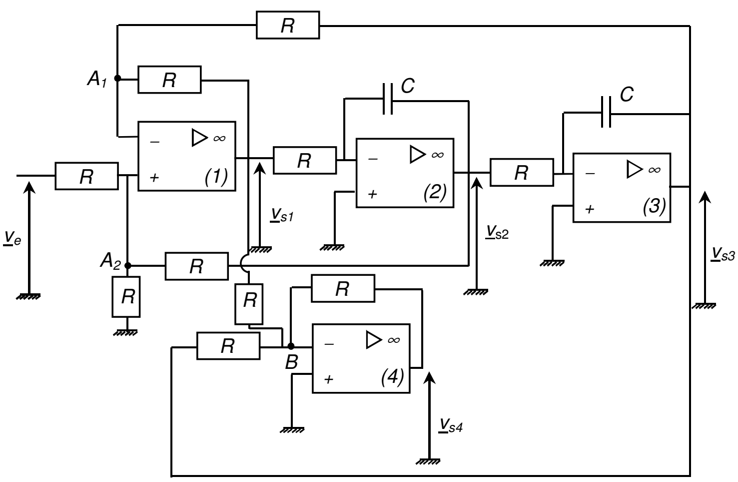
a) Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}=\underline{u}_s/\underline{u}_e$ du montage ci-contre. On appelle ω la pulsation du générateur, $\omega_0=1/RC$ et l'AOP est supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire .



b) Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude et en phase. Que se passe-t-il lorsque la valeur de C est réglable

22) Filtre universel :

Dans certains circuits intégrés, il peut être intéressant d'utiliser des filtres de nature différente (passe-bande, passe-bas, passe-haut ou encore réjecteur de bande) mais possédant la même pulsation caractéristique ω_0. Ces filtres sont dits universels.



En exprimant les quatre tensions de sortie $\underline{v}_{s1}$, $\underline{v}_{s2}$, $\underline{v}_{s3}$ et $\underline{v}_{s4}$ (écrites en notation complexe) en fonction de $\underline{v}_e$, montrer que le circuit proposé dans cet exercice, utilisé en régime permanent sinusoïdal, constitue un exemple de filtre universel.

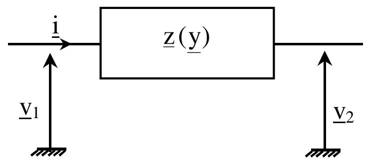
Les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

Solution :

Les amplificateurs opérationnels numérotés (2) et (3) sont utilisés dans des montages intégrateurs, pour lesquels :

$$\underline{v}_{s_2} = -\frac{1}{jRC\omega}\underline{v}_{s_1} \quad \text{et} \quad \underline{v}_{s_3} = -\frac{1}{jRC\omega}\underline{v}_{s_2} \quad \text{(d'où : } \underline{v}_{s_3} = -\frac{1}{(RC\omega)^2}\underline{v}_{s_1}\text{)}$$

Dans le cas illustré sur la figure ci-contre, l'intensité $\underline{i}$ du courant qui traverse l'impédance complexe $\underline{z}$ (ou l'admittance $\underline{y}$) peut s'écrire en fonction des tensions (par rapport à la masse) qui « l'encadrent » $\underline{v}_1$ et $\underline{v}_2$, sous la forme :



$$\underline{i} = (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)/\underline{z} = (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)\underline{y}$$

L'utilisation de ce résultat permet alors d'écrire la loi des nœuds en termes de potentiels au nœud B (dont le potentiel par rapport à la masse est nul), situé à l'entrée inverseuse de l'amplificateur (4), sous la forme :

$$\frac{1}{R}(\underline{v}_{s_3} - 0) = \frac{1}{R}(0 - \underline{v}_{s_1}) + \frac{1}{R}(0 - \underline{v}_{s_4}) \quad \text{soit} \quad \underline{v}_{s_4} = -(\underline{v}_{s_1} + \underline{v}_{s_3})$$

L'amplificateur (4) est ici utilisé dans un montage sommateur inverseur.

Remarque : ce résultat pouvait être obtenu en appliquant directement le théorème de Millman qui, au nœud B, permet d'écrire :

$$0 = \left(\frac{\underline{v}_{s_1}}{R} + \frac{\underline{v}_{s_3}}{R} + \frac{\underline{v}_{s_4}}{R}\right) \Big/ \frac{3}{R}$$

Soit e^+ la tension (par rapport à la masse) de la borne non inverseuse de l'amplificateur (1), égale à la tension de la borne inverseuse du même amplificateur en régime linéaire. L'écriture de la loi des nœuds en termes de potentiels aux nœuds A_1 et A_2 donne :

$$0 = \frac{1}{R}(\underline{e}^+ - \underline{v}_{s_1}) + \frac{1}{R}(\underline{e}^+ - \underline{v}_{s_3}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{R}(\underline{v}_e - \underline{e}^+) = \frac{1}{R}(\underline{e}^+ - 0) + \frac{1}{R}(\underline{e}^+ - \underline{v}_{s_2})$$

Soit $2\underline{e}^+ = \underline{v}_{s_1} + \underline{v}_{s_3}$ et $\underline{v}_e + \underline{v}_{s_2} = 3\underline{e}^+$, d'où :

$$3(\underline{v}_{s_1} + \underline{v}_{s_3}) = 2(\underline{v}_e + \underline{v}_{s_2})$$

Là encore, les deux relations précédentes pouvaient s'obtenir en écrivant directement le théorème de Millman aux nœuds A_1 et A_2 :

$$e^+ = \left(\frac{\underline{v}_{s_1}}{R} + \frac{\underline{v}_{s_3}}{R}\right) \Big/ \frac{2}{R} \quad \text{et} \quad e^+ = \left(\frac{\underline{v}_e}{R} + \frac{\underline{v}_{s_2}}{R}\right) \Big/ \frac{3}{R}$$

On peut alors en déduire une relation entre les tensions $\underline{v}_{s_1}$ et $\underline{v}_e$:

$$2\left(\underline{v}_e - \frac{1}{jRC\omega}\underline{v}_{s_1}\right) = 3\left(\underline{v}_{s_1} - \frac{1}{(RC\omega)^2}\underline{v}_{s_1}\right)$$

d'où, finalement :

$$\frac{\underline{v}_{s_1}}{\underline{v}_e} = -\frac{2}{3}\frac{R^2C^2\omega^2}{1+(2/3)jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

On reconnaît la forme normalisée de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du 2nd ordre :

$$\frac{\underline{v}_{s_1}}{\underline{v}_e} = A_0\frac{-\omega^2/\omega_0^2}{1+2j\sigma\omega/\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \qquad \left(\text{avec } A_0 = \frac{2}{3},\ \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ et } \sigma = \frac{1}{3}\right)$$

La tension de sortie du 2ème amplificateur est alors telle que :

$$\underline{v}_{s_2} = -\frac{1}{jRC\omega}\underline{v}_{s_1} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\underline{v}_{s_2}}{\underline{v}_e} = -\frac{(2/3)jRC\omega}{1+(2/3)jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

On reconnaît ici la forme normalisée de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du 2nd ordre, dont la pulsation de résonance est ω_0.

La tension de sortie du 3ème amplificateur est donnée par :

$$\underline{v}_{s_3} = -\frac{1}{(RC\omega)^2}\underline{v}_{s_1} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\underline{v}_{s_3}}{\underline{v}_e} = \frac{2}{3}\frac{1}{1+(2/3)jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

On aboutit à la fonction de transfert normalisée d'un filtre passe-bas du 2nd ordre.

Enfin, la tension de sortie du 4ème amplificateur sera :

$$\underline{v}_{s_4} = -(\underline{v}_{s_1} + \underline{v}_{s_3}) \qquad \text{soit} \qquad \frac{\underline{v}_{s_4}}{\underline{v}_e} = -\frac{\underline{v}_{s_1}}{\underline{v}_e} - \frac{\underline{v}_{s_3}}{\underline{v}_e}$$

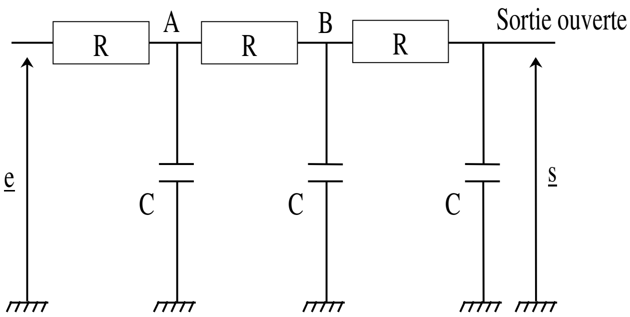
On obtient ainsi la forme normalisée de la fonction de transfert d'un filtre réjecteur de bande qui élimine les tensions dont la pulsation est proche de ω_0 :

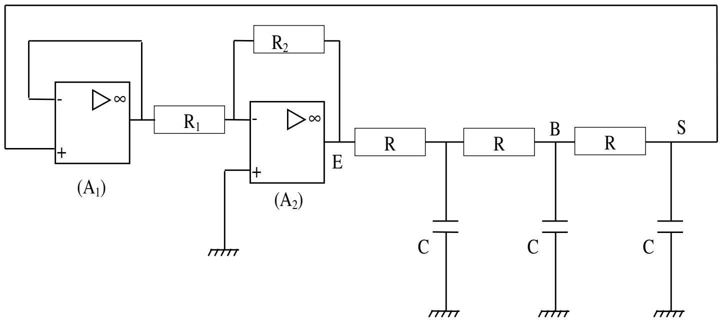
$$\frac{\underline{v}_{s_4}}{\underline{v}_e} = -\frac{2}{3}\frac{1-R^2C^2\omega^2}{1+(2/3)jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

Les amplificateurs opérationnels (2), (3) et (4) réalisent des opérations mathématiques simples (l'intégration pour les amplificateurs (2) et (3) et la sommation pour l'amplificateur (4)) qui permettent, à partir du montage réalisé autour du 1er amplificateur, d'obtenir quatre filtres de base du 2nd ordre. Une telle structure est appelée « structure à variable d'état ».

23) Oscillateur à déphasage :

1) On considère un filtre passif à 3 cellules identiques (figure de droite), alimenté par la tension sinusoïdale e(t), de fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ variable :





Montrer que la fonction de transfert du filtre peut s'écrire :

$$\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{1}{1+6jRC\omega+5(j\omega RC)^2+(j\omega RC)^3} \quad \text{(on posera } \omega_0=1/RC\text{)}$$

Déterminer la pulsation ω_r pour laquelle cette fonction est réelle. Calculer $\underline{H}(j\omega_r)$.

2) Le filtre précédent est utilisé dans le montage de droite, faisant intervenir deux AOP idéaux et fonctionnant en régime linéaire. Préciser (sans démonstration) la fonction de chaque AOP.

Montrer que le montage peut entrer en oscillation si l'on choisit convenablement les résistances R_1 et R_2.

Préciser la valeur de la fréquence d'oscillation avec $R = 2\,200\ \Omega$ et C = 33 nF.

Solution :

2-a) Le 1[er] montage à AOP est un montage suiveur ; le second est un montage amplificateur inverseur de gain $-R_2/R_1$.

b) On a, d'une part $\frac{\underline{e}}{\underline{s}}=-\frac{R_2}{R_1}$ et d'autre part $\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}$. Par conséquent : $\underline{H}(j\omega)=-\frac{R_1}{R_2}$.

La fonction de transfert $\underline{H}$ n'est réelle que pour la pulsation ω_r ; l'équation précédente n'admettra de solution que si $R_2/R_1=29$. L'ensemble du circuit constitue alors un oscillateur de pulsation $\omega_r=\sqrt{6}\,\omega_0$. AN : $f_0=5{,}37\ kHz$.

1-a) La loi des nœuds en termes de potentiels donne, aux points A et B :

$$\frac{\underline{e}-\underline{v}_A}{R}=jC\omega\,\underline{v}_A+\frac{\underline{v}_A-\underline{v}_B}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\underline{v}_A-\underline{v}_B}{R}=jC\omega\,\underline{v}_B+\frac{\underline{v}_B-\underline{s}}{R}$$

Soit :

$$\underline{v}_A(2+jRC\omega)=\underline{e}+\underline{v}_B \quad (1) \quad \text{et} \quad \underline{v}_B(2+jRC\omega)=\underline{s}+\underline{v}_A \quad (2)$$

Par ailleurs (diviseur de tension) :

$$\underline{s} = \frac{1/jC\omega}{R+(1/jC\omega)}\underline{v}_B = \frac{1}{1+jRC\omega}\underline{v}_B \qquad \text{soit} \qquad \underline{v}_B = (1+jRC\omega)\,\underline{s} \qquad (3)$$

A l'aide de (1), on élimine $\underline{v}_A$ dans (2) :

$$\underline{v}_B(2+jRC\omega) = \underline{s} + \frac{\underline{e}+\underline{v}_B}{2+jRC\omega} \qquad \text{d'où} \qquad \underline{v}_B\left[(2+jRC\omega)^2-1\right] = (2+jRC\omega)\,\underline{s}+\underline{e}$$

L'équation (3) permet d'éliminer $\underline{v}_B$ dans l'équation ci-dessus :

$$(1+jRC\omega)\left[(2+jRC\omega)^2-1\right]\,\underline{s} = (2+jRC\omega)\,\underline{s}+\underline{e}$$

D'où la fonction de transfert du filtre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1+6jRC\omega+5(j\omega RC)^2+(j\omega RC)^3}$$

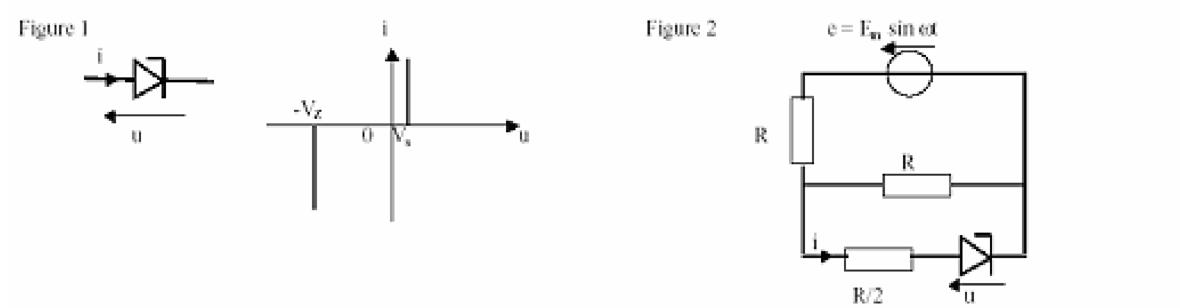
b) $\underline{H}$ est réelle si la partie imaginaire de son dénominateur est nulle ; on obtient la valeur ω_r :

$$6RC\omega_r - (\omega_r/\omega_0)^3 = 0 \qquad soit \qquad \omega_r = \sqrt{6}\,\omega_0$$

Alors, $\underline{H}(j\omega_r) = -\frac{1}{29}$.

24) Diode Zener :

a) On considère une diode Zener dont la caractéristique est donnée. Modéliser cette diode dans le cas i > 0 et i < 0.



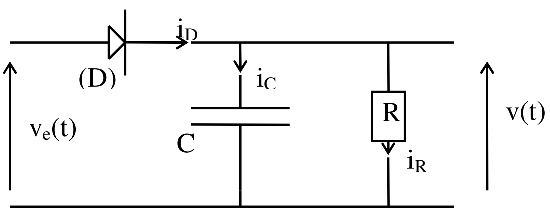
b) On l'utilise dans le circuit proposé. Déterminer l'intensité du courant i(t) et représenter la courbe correspondante sur une période.

25) Détecteur de crête :

On considère le montage ci-dessous ; la tension d'entrée est $v_e(t)=V_0\sin\omega t$. On suppose que $RC \gg T = 2\pi/\omega$. La diode est supposée idéale et de seuil nul. On note v(t) la tension aux bornes de R.

a) Décrire qualitativement et comparer les évolutions temporelles de $v_e(t)$ et v(t). On pourra s'aider d'une représentation graphique.

b) A partir de quel instant t_0 le courant i_D devient-



il nul ? Montrer que $v(t_0) \approx V_0$.

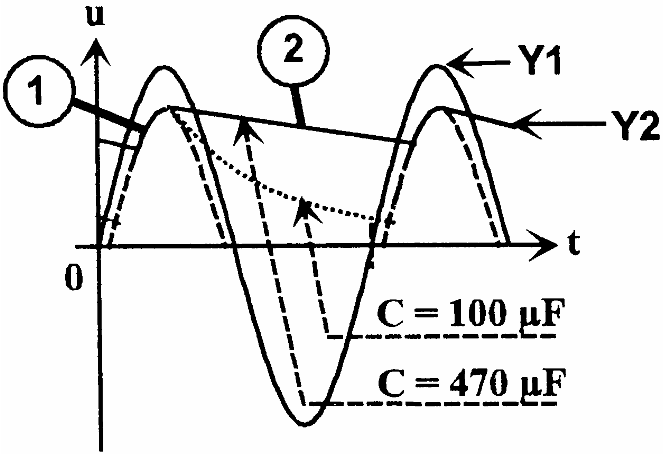
c) Comment varie v(t) aux instants ultérieurs ?

d) Montrer qu'au cours d'une période, la variation maximale de tension Δv aux bornes de la résistance est approximativement proportionnelle à T et que $\Delta v / V_0 << 1$.

e) AN : on désire que la tension v(t) soit de l'ordre de 12 V et qu'un courant de 1 mA circule dans R. Quelle doit être la valeur de la capacité C pour que $\Delta v / V_0 < 10^{-2}$, la fréquence du générateur étant de 50 Hz ?

Solution :

- a) L'allure de l'oscillogramme observé est :



b) On suppose la diode passante. Alors, $v_e(t) = v(t)$. La loi des nœuds donne :

$$i_D = i_C + i_R = C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v = C\omega\cos\omega t + \frac{1}{R}\sin\omega t = C\omega\left(\cos\omega t + \frac{1}{RC\omega}\sin\omega t\right)$$

Ce courant s'annule à l'instant t_0 donné par :

$$\cos\omega t_0 + \frac{1}{RC\omega}\sin\omega t_0 = 0 \quad soit \quad \tan\omega t_0 = -RC\omega >> 1$$

Par conséquent, $\omega t_0 \approx \frac{\pi}{2}$ et $t_0 \approx \frac{T}{4}$. On a bien alors $v(t_0) \approx V_0$.

c) La diode bloquée, le condensateur va se décharger lentement dans la résistance, selon la loi :

$$v(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}})$$

d) Au bout d'une période $T = t - t_0 >> \tau$:

$$v(t) = V_0(1 - e^{-T/\tau}) \approx V_0(1 - \frac{T}{\tau}).$$

Par conséquent : $\frac{\Delta v}{V_0} \approx \frac{T}{\tau} = \frac{T}{RC} << 1$