

EXERCICES SUR L'ELECTRONIQUE DE PUISSANCE, SUR LA TRANSFORMEE DE LAPLACE,
SUR LES VARIATEURS DE VITESSE ET SUR LES ASSERVISSEMENTS

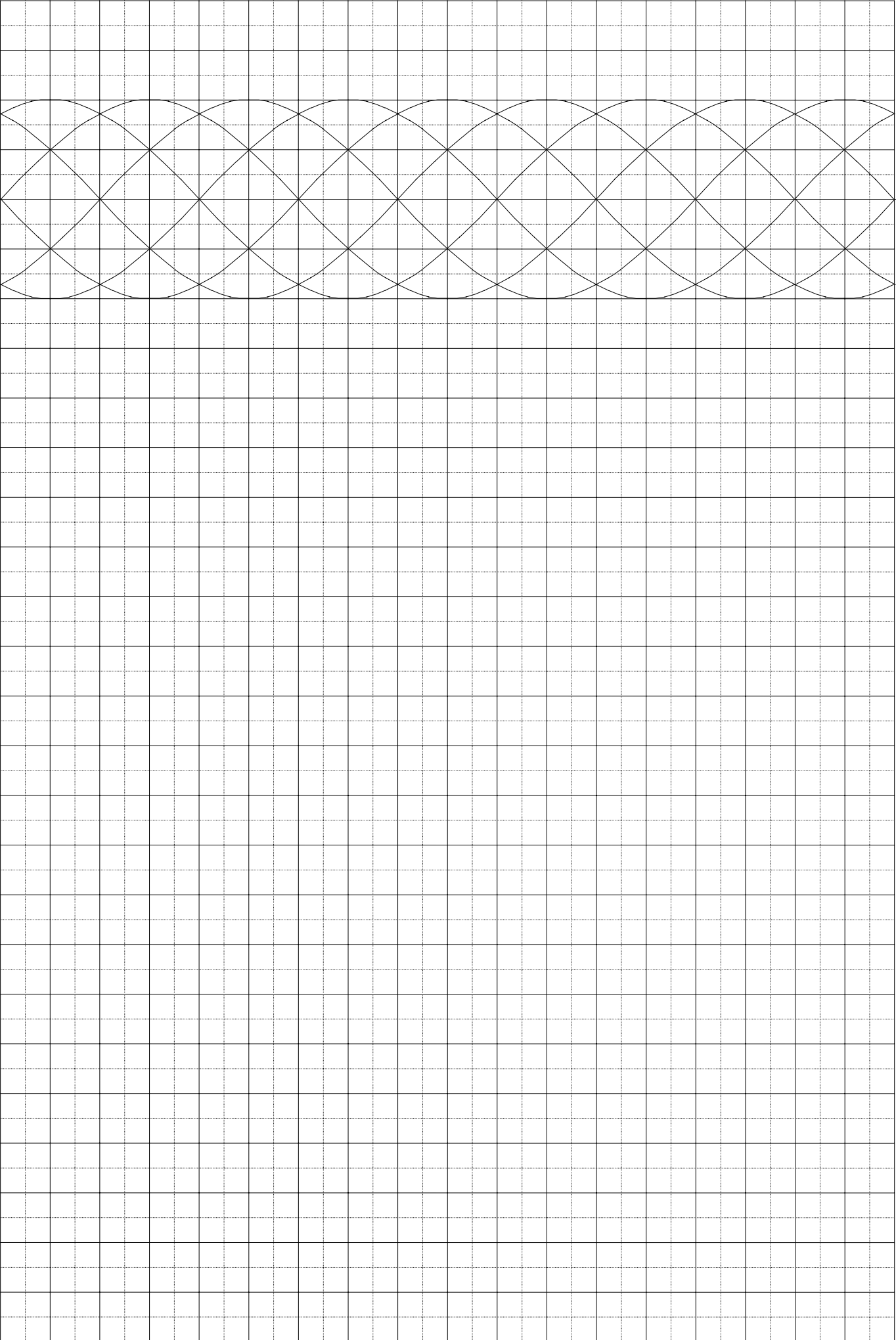
*Presser la touche F5 pour faire apparaître les signets
qui favorisent la navigation dans le document.*

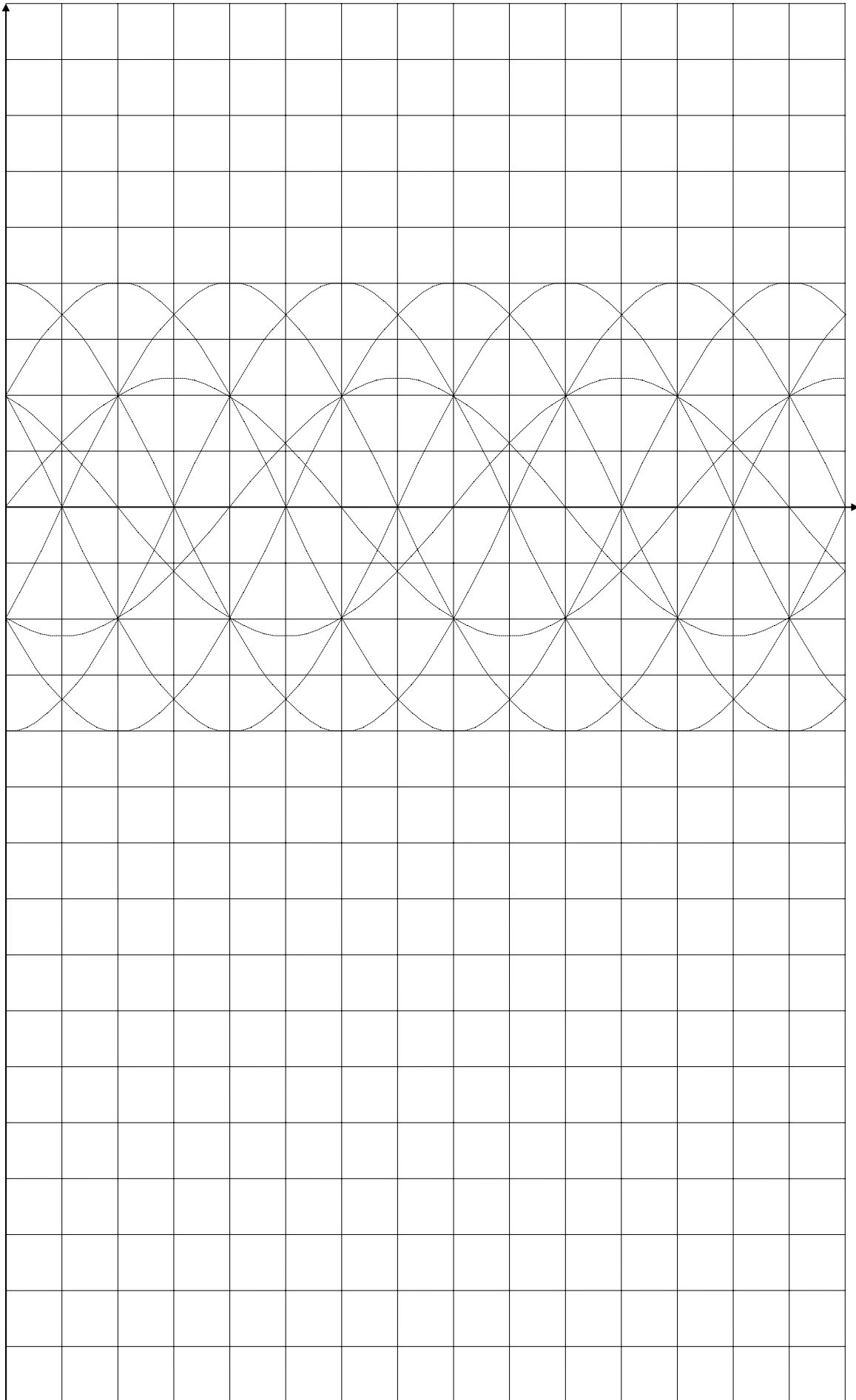
Sommaire

Exercice sur les différentes puissances mises en jeu en électronique de puissance	1
Exercices sur le redressement non commandé	2
Exercices sur le redressement commandé	6
Exercices sur la transformée de Laplace	8
Exercices sur les hacheurs	10
Exercices sur les variateurs de vitesse pour machines à courant continu.....	13
Exercices sur les onduleurs.....	16
Exercices sur les asservissements.....	19
Exercices sur les variateurs de vitesse pour machines à courant alternatif	26
Exercices sur les gradateurs.....	34
Problème de synthèse	36

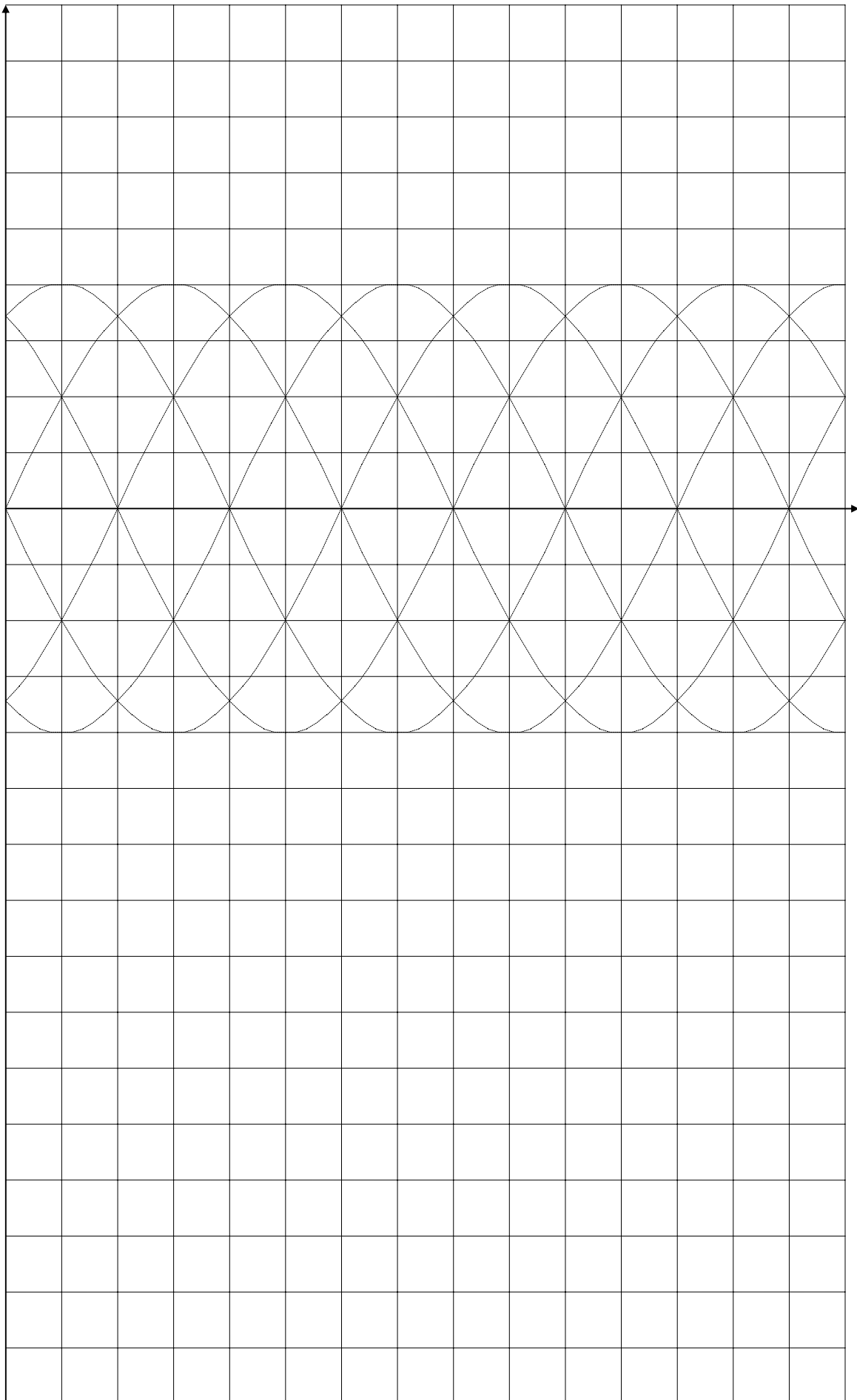
N.B.: Pour faciliter le tracé des courbes correspondants aux exercices 2, 3, 9, 10, 11, 38, 41 et 46 (et, éventuellement, 4 et 6), des exemples de supports graphiques figurent ci-après. Il faudra évidemment les imprimer en nombre suffisant!

Support graphique pour exercice 2

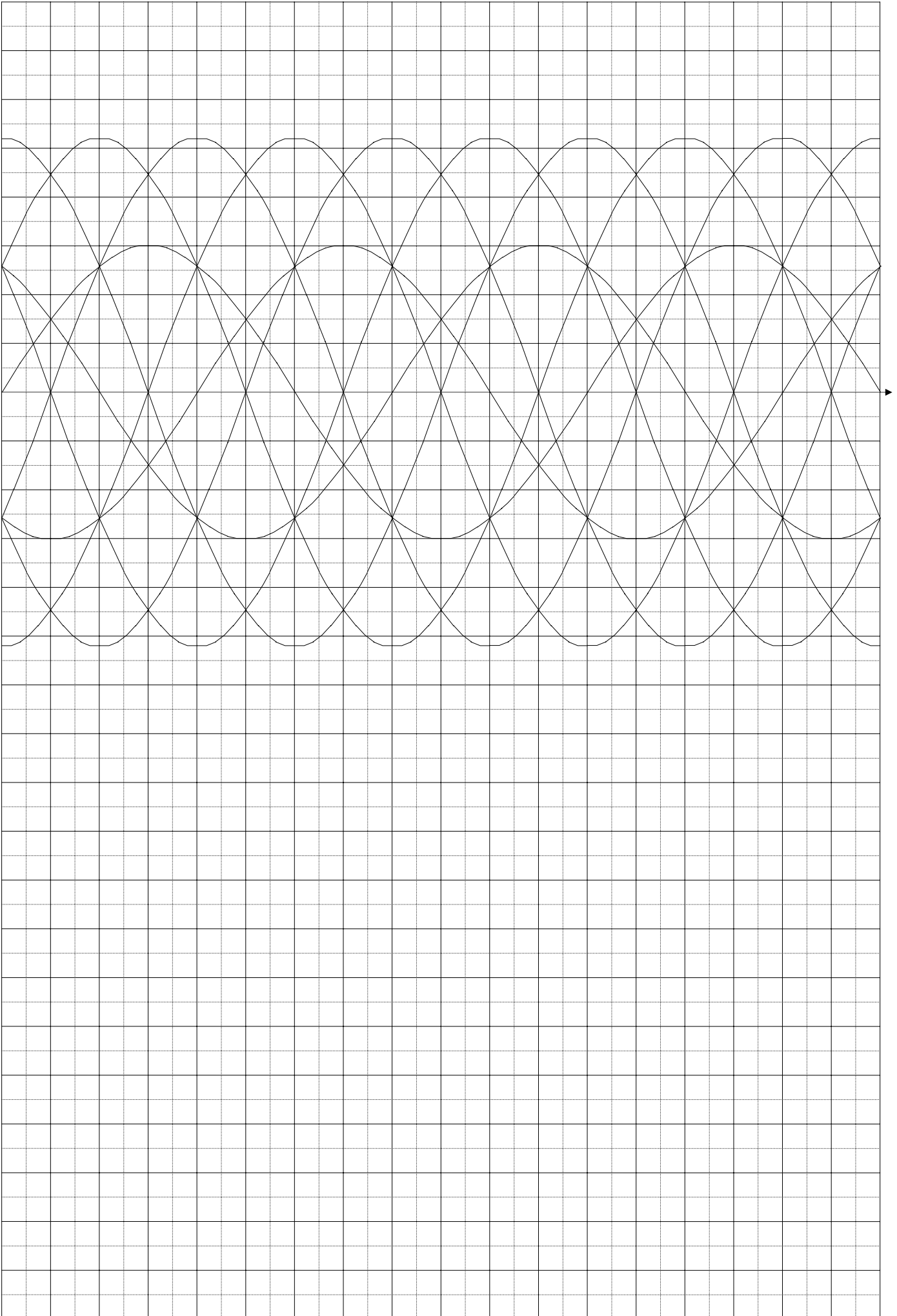




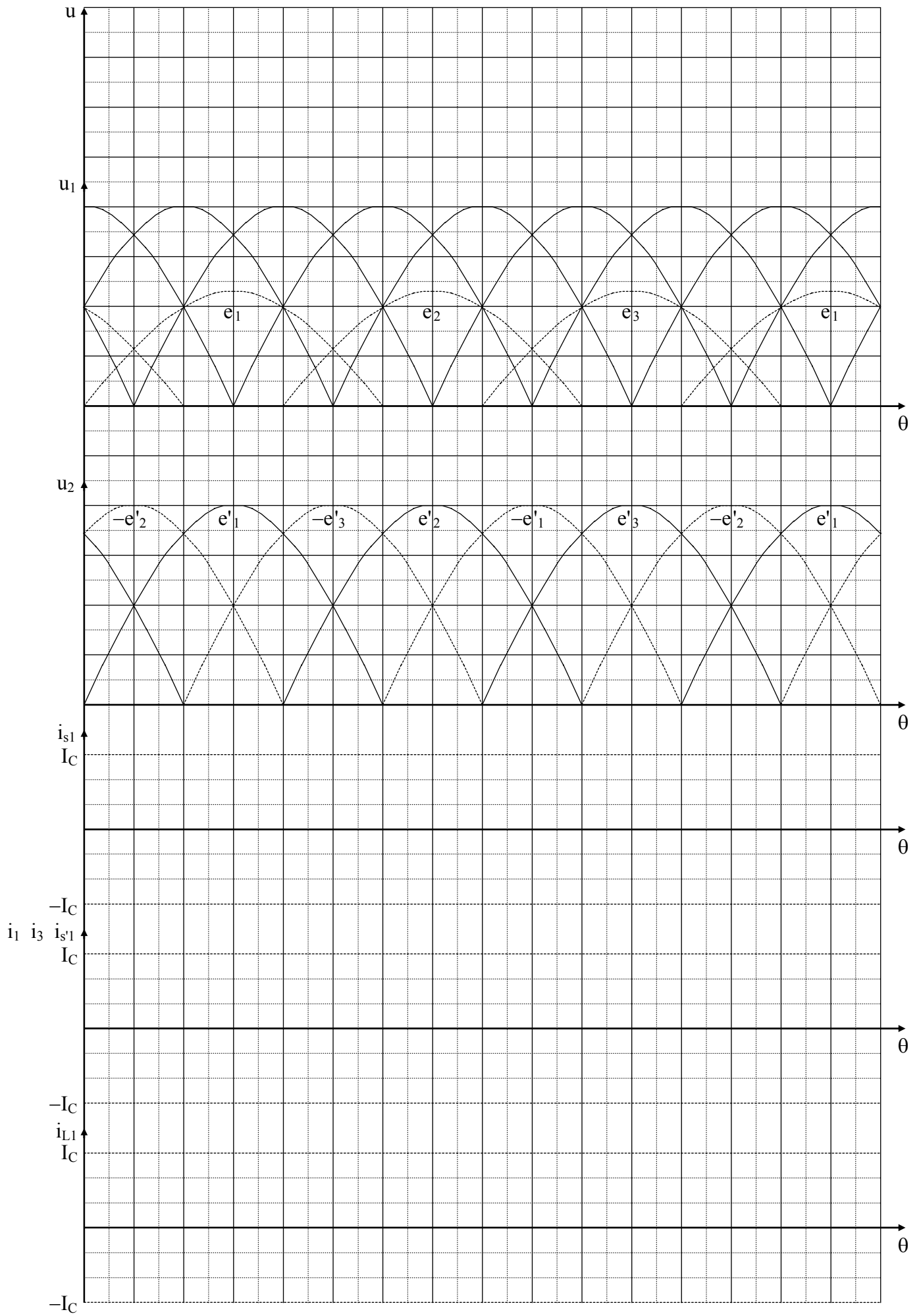
Support graphique pour exercice 3 (2ème partie)



Support graphique pour exercices 9 et 10

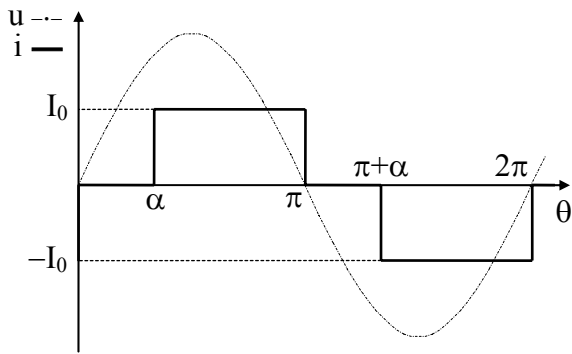


Support graphique pour exercice 11



Exercice sur les différentes puissances mises en jeu en électronique de puissance

① Un dipôle alimenté par une tension sinusoïdale $u = U\sqrt{2} \sin\theta$ absorbe un courant i dont la forme est représentée ci-dessous. On pose $i_1 = I_1\sqrt{2} \sin(\theta - \varphi)$ le fondamental de i .



1) Tracer l'allure de i_1 en la superposant à celles de u et de i .
En déduire la relation liant φ à α .

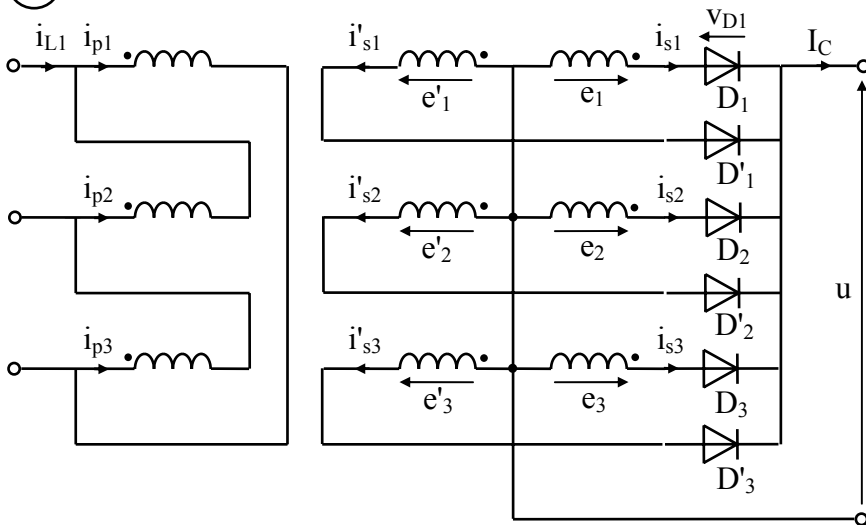
2) Déterminer l'expression de la puissance active P absorbée par le dipôle en fonction de U , I_0 et α . Que vaut P en fonction de U , I_1 et φ ? En déduire, compte tenu de 1), l'expression de I_1 en fonction de I_0 et de α .

3) Déterminer les expressions des puissances réactive Q et apparente S en fonction de U , I_0 et α .

4) A.N.: Pour $U = 220\text{V}$, $I_0 = 10\text{A}$, et $\alpha = 0^\circ$, 90° et 150° , calculer P , Q , S , la puissance déformante D et le facteur de puissance f .

Exercices sur le redressement non commandé

2



Pour le montage ci-contre on a

$$e_1 = -e'_1 = E\sqrt{2} \sin\theta,$$

$$e_2 = -e'_2 = E\sqrt{2} \sin(\theta - 2\pi/3),$$

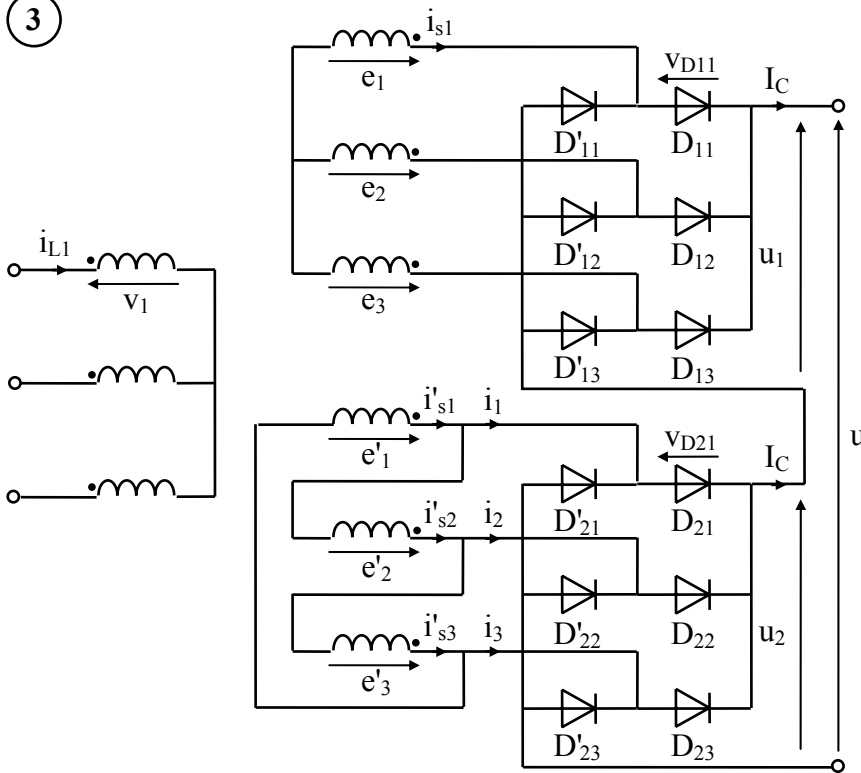
et $e_3 = -e'_3 = E\sqrt{2} \sin(\theta - 4\pi/3).$

On pose U_p la valeur efficace d'une tension entre phases au primaire et on note $n = E/U_p$ le rapport des nombres de spires (pour un demi-enroulement au secondaire).

1) Déterminer les intervalles de conduction de chaque diode puis tracer les allures de u et de v_{D1} .

- 2) Tracer les allures de i_{s1} et de i'_{s1} , puis celles de i_{p1} , i_{p2} , i_{p3} et i_{L1} . Tracer par ailleurs la somme des courants i_p et vérifier qu'elle n'est pas nulle.
- 3) Déterminer les expressions de la valeur moyenne U_C de u et des valeurs efficaces I_{s1} de i_{s1} , I_{p1} de i_{p1} et I_{L1} de i_{L1} . Que vaut ici le rapport I_{L1}/I_{p1} ?
- 4) Calculer les valeurs des facteurs de puissance f_s au secondaire et f_p au primaire du transformateur, puis celle du facteur de puissance en ligne $f_L = U_C I_C / (\sqrt{3} U_p I_L)$. Constater qu'ici f_L est différent de f_p .
- 5) On remplace le couplage triangle par un couplage étoile sans neutre.
- a) Sachant qu'on a alors $i_{p1} = n \left[\frac{2}{3}(i_{s1} - i'_{s1}) - \frac{1}{3}(i_{s2} - i'_{s2}) - \frac{1}{3}(i_{s3} - i'_{s3}) \right]$, tracer l'allure de i_{p1} et déterminer sa valeur efficace I_{p1} .
- b) Calculer la nouvelle valeur du facteur de puissance au primaire f_p . Comparer le résultat à celui obtenu dans le cas du couplage triangle.
- 6) On veut $U_C = 250V$. Le réseau d'alimentation étant de type $3 \times 380V$, calculer n dans le cas du couplage triangle.

3



Soit le montage ci-contre. La tension aux bornes de chaque enroulement primaire, notée V , est égale à 220V. Pour les tracés des courants, on prendra $I_C = 150A$.

I) Etude du redresseur PD3

On pose $e_1 = nV\sqrt{2} \sin\theta$,
 $e_2 = nV\sqrt{2} \sin(\theta - 2\pi/3)$,
 et $e_3 = nV\sqrt{2} \sin(\theta - 4\pi/3)$.

- 1) Déterminer les intervalles de conduction des diodes puis tracer les allures de u_1 et de v_{D11} .
- 2) Déterminer l'expression de la valeur moyenne U_{1C} de u_1 .

A.N.: On impose $U_{1C} = 500V$, calculer n et la tension inverse maximale aux bornes de chaque diode.

nes de chaque diode.

- 3) Tracer l'allure de i_{s1} (échelle: 1 carreau = 100A). Calculer sa valeur efficace I_{s1} puis le facteur de puissance f_{s1} du redresseur PD3.

II) Etude du redresseur S3

On pose $e'_1 = n'V\sqrt{2} \sin\theta$, $e'_2 = n'V\sqrt{2} \sin(\theta - 2\pi/3)$ et $e'_3 = n'V\sqrt{2} \sin(\theta - 4\pi/3)$.

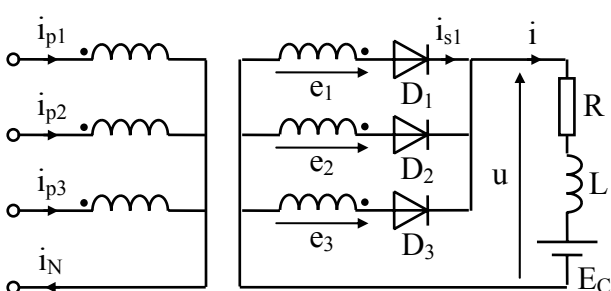
- 1) Déterminer les intervalles de conduction des diodes puis tracer les allures de u_2 et de v_{D21} .
- 2) Déterminer l'expression de la valeur moyenne U_{2C} de u_2 . A.N.: On impose $U_{2C} = 500V$, calculer n' et la tension inverse maximale aux bornes de chaque diode.
- 3) Sachant que $i'_{s1} + i'_{s2} + i'_{s3} = 0$, déterminer la relation liant i'_{s1} , i_1 et i_3 . Tracer alors les allures de ces trois courants (échelle: 1 carreau = 100A). Calculer la valeur efficace I'_{s1} de i'_{s1} puis le facteur de puissance f_{s2} du redresseur S3.

III) Etude de la mise en série

Les valeurs de n et de n' sont celles calculées au I) et au II).

- 1) Tracer l'allure de u . Que vaut sa valeur moyenne U_C ?
- 2) Tracer l'allure de i_{L1} (échelle: 1 carreau = 100A). Calculer sa valeur efficace I_{L1} puis le facteur de puissance f_p du montage.

4



$e_1 = E\sqrt{2} \sin\theta$
 $e_2 = E\sqrt{2} \sin(\theta - 2\pi/3)$
 $e_3 = E\sqrt{2} \sin(\theta - 4\pi/3)$

avec $E = 220V$ et $\theta = \omega_0 t$ ($\omega_0 = 100\pi \text{ rad/s}$). Par ailleurs, on donne $E_C = 240V$, $R = 1\Omega$ et on suppose que le rapport des nombres de spires est égal à 1.

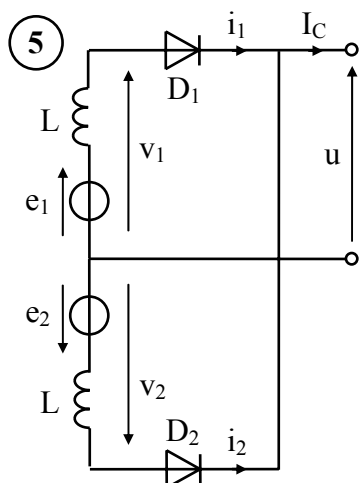
- 1) Tracer l'allure de u , puis calculer sa valeur moyenne U_C .

2) On fait l'approximation du premier harmonique. Le courant i peut donc se mettre sous la forme $i = I_C - I_1 \sqrt{2} \sin(3\theta - \varphi_1)$.

a) Calculer I_C .

b) Sachant que le premier harmonique de u a pour valeur efficace $U_C/4\sqrt{2}$, déterminer l'expression de I_1 en fonction de U_C , R , L et ω_0 . Application: On veut que le facteur de forme de i soit égal à 1,1. Calculer I_1 , puis la valeur qu'il faut donner à L .

c) Pour la valeur précédente de L , et pour $\varphi_1 = \pi/2$, tracer i , i_{s1} et i_{p1} . Déduire de i_{p1} les allures de i_{p2} et de i_{p3} , puis tracer i_N .



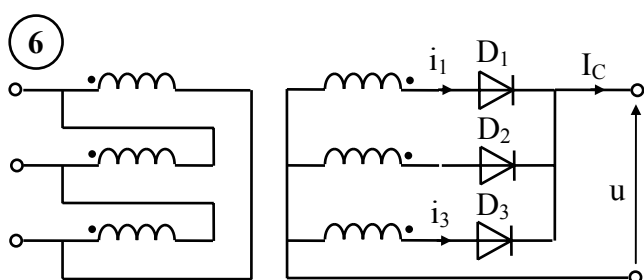
Le montage ci-contre est constitué d'un transformateur à point milieu et de deux diodes supposées parfaites. Les demi-enroulements secondaires sont caractérisés par leur f.é.m. à vide $e_1 = -e_2 = E\sqrt{2} \sin\theta$ avec $E = 60V$ et $\theta = \omega_0 t$, et par leur inductance ramenée au secondaire L avec $L\omega_0 = 0,8\Omega$ à 50Hz. On néglige les autres chutes de tension, et on admet que le courant fourni à la charge est parfaitement lissé.

1) Au moment des commutations, les deux diodes conduisent simultanément pendant une durée angulaire α_0 (phénomène d'empiètement anodique). Ecrire les relations entre e_1 , v_1 , $L\omega_0$ et $di_1/d\theta$ d'une part, et entre e_2 , v_2 , $L\omega_0$ et $di_2/d\theta$ d'autre part.

2) En remarquant que $u = v_1 = v_2$ et que $i_1 + i_2 = I_C$, déduire des expressions précédentes que $u = 0$ pendant l'empiètement. En considérant alors par exemple l'intervalle $[0; \alpha_0]$, intégrer une des équations pour obtenir l'expression de $i_1(\theta)$. En déduire l'angle d'empiètement α_0 . A.N.: Calculer α_0 pour $I_C = 10A$.

3) Tracer $u = f(\theta)$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi + \alpha_0$. Déterminer l'expression de la valeur moyenne U_C de u .

4) On pose $\Delta U_C = U_{C0} - U_C$ où U_{C0} représente la tension continue fictive à vide $2\sqrt{2}E/\pi$. Exprimer ΔU_C en fonction de $L\omega_0$ et de I_C . A.N.: Pour $I_C = 10A$, calculer ΔU_C , U_{C0} et $\Delta U_C/U_{C0}$.



Le redresseur ci-contre est constitué d'un transformateur Dy_n , alimenté par un réseau $3 \times 380V - 50Hz$, et de diodes supposées parfaites.

1) Des essais préliminaires du transformateur ont donné:
à vide: $U_{10} = 380V$ $U_{20} = 400V$
en C.C.: $U_{1c} = 20V$ $I_{2c} = 20A$ $P_{1c} = 515W$

Calculer le rapport de transformation m et les éléments R_s et X_s du schéma équivalent ramené au secondaire. Déduire de X_s la valeur L_s de l'inductance de fuite correspondante.

2) On néglige dans cette question toutes les chutes de tension. Tracer l'allure, notée u_0 , de u et calculer sa valeur moyenne U_{C0} .

3) On tient compte de la résistance R_s des enroulements. Déterminer l'expression de u en fonction de u_0 , R_s et I_C et tracer son allure. Exprimer la chute de tension moyenne $\Delta_1 U_C$ en fonction de R_s et de I_C et calculer sa valeur numérique pour $I_C = 30A$.

4) Pour tenir compte de l'inductance L_s des enroulements, on étudie par exemple la commutation $D_3 - D_1$.

a) En prenant le début de conduction de D_1 comme origine des angles, déterminer l'expression du courant $i_1(\theta)$ pendant l'empiètement en fonction de U_{20} , X_s et θ . En déduire l'expression de l'angle d'empiètement α_0 . A.N.:

Calculer α_0 pour $I_C = 30A$.

b) Tracer la nouvelle allure de u , puis exprimer la chute de tension moyenne $\Delta_2 U_C$ en fonction de X_s et de I_C .

A.N. Calculer $\Delta_2 U_C$ pour $I_C = 30A$.

7 Soit le montage de la figure 1. On suppose que le quadripôle Q absorbe un courant strictement constant I (égal à son courant de sortie) quel que soit l'instant considéré. Pour simplifier, on admet que le blocage du pont redresseur se produit lorsque la tension d'alimentation passe par un extremum. En prenant alors un des instants où e est maximal comme origine des temps, on aura $e = E\sqrt{2} \cos \omega_0 t$ avec $\omega_0 = 2\pi/T$ ($T = 20ms$) et l'allure de la tension $u(t)$ sera celle représentée sur la figure 2.

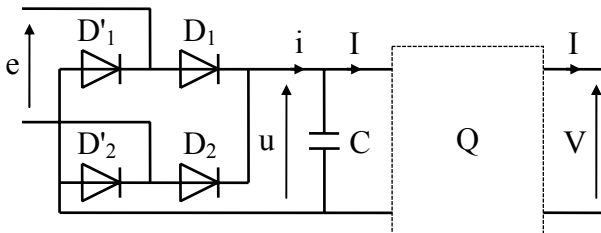


figure 1

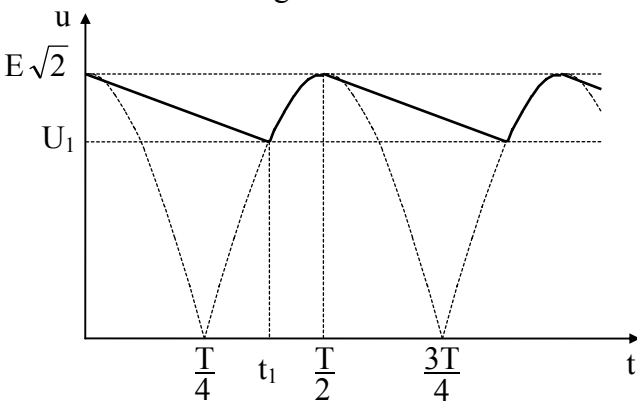


figure 2

1) $0 \leq t \leq t_1$: Toutes les diodes sont bloquées.

a) Déterminer l'expression de $u(t)$ en fonction de E , I , C et t . Compte tenu du fait que $u(t_1) = U_1$, exprimer C en fonction de I , t_1 , E et U_1 .

b) En remarquant que U_1 est aussi la valeur de la tension $-e$ au temps $t = t_1$, déterminer l'expression de t_1 en fonction de ω_0 , U_1 et E . En déduire celle de C en fonction uniquement de I , T , E et U_1 .

c) On admet, en plus, que t_1 est égal à $T/2$. Donner, compte tenu de a), l'expression approchée de C .

d) Application: Pour $I = 1A$, $U_1 = 14V$ et les valeurs suivantes de E , $12V$, $15V$ et $18V$, calculer les valeurs de C que l'on obtient à partir des deux relations précédentes. Discuter des résultats obtenus.

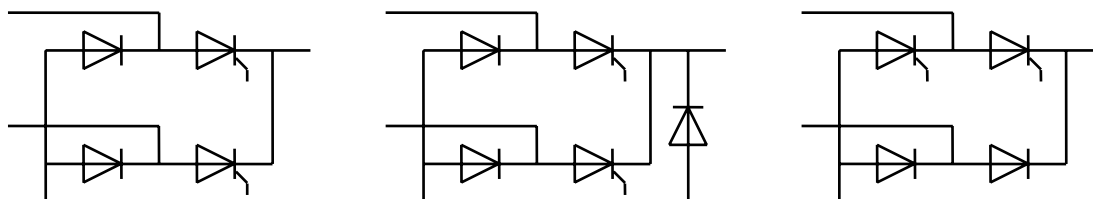
2) $t \geq t_1$: Tant que le pont conduit, et en conservant l'origine des temps initiale, exprimer $i(t)$ en fonction de I , C , ω_0 , E et t . A.N.: Pour $I = 1A$, $U_1 = 14V$, $C = 1000\mu F$ et

$E = 15V$, calculer t_1 et l'expression numérique de $i(t)$. Vérifier que $i(T/2)$ est encore positif, déterminer à l'aide d'une méthode numérique le temps au bout duquel ce courant s'annule et conclure sur l'hypothèse simplificatrice faite initialement.

3) En se plaçant dans l'hypothèse du 1)c), calculer la puissance P dissipée dans le quadripôle Q pour $I = 1A$, $U_1 = 14V$, $V = 12V$ et les valeurs suivantes de E , $12V$, $15V$ et $18V$. Conclusion.

Exercices sur le redressement commandé

8 On considérera successivement les différents montages PD2 mixtes représentés ci-dessous en admettant qu'ils débitent un courant strictement constant I_C .

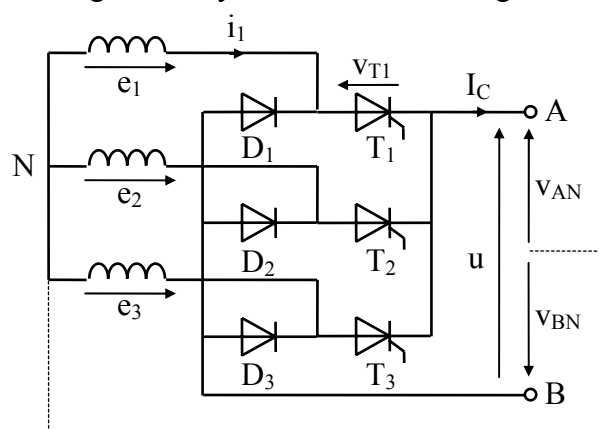


Pour $\alpha = 150^\circ$, déterminer les intervalles de conduction des redresseurs puis tracer les allures

- de la tension aux bornes de la charge
- de la tension aux bornes d'un thyristor
- du courant dans un thyristor
- du courant dans une diode
- du courant dans la diode de roue libre
- du courant fourni par l'alimentation.

Que peut-on en conclure en ce qui concerne la possibilité d'un défaut de blocage pour les thyristors?

9 On se propose d'étudier le pont PD3 mixte en considérant qu'il est constitué par l'association d'un montage P3 à thyristors et d'un montage P3 à diodes. On note comme habituellement les trois tensions simples du réseau d'alimentation sous la forme $e_1 = E\sqrt{2}\sin\theta$, $e_2 = E\sqrt{2}\sin(\theta - 2\pi/3)$ et $e_3 = E\sqrt{2}\sin(\theta - 4\pi/3)$.

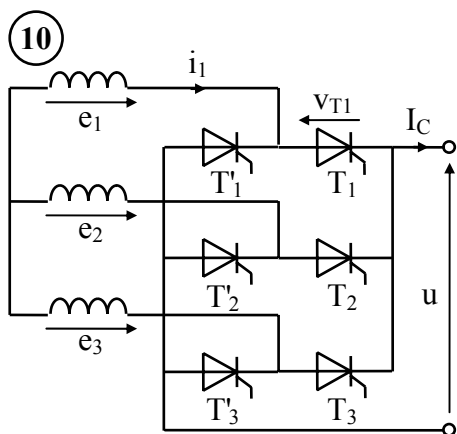


1) Pour $\alpha = 45^\circ$, tracer l'allure de v_{AN} . Pour α quelconque, déterminer l'expression de la valeur moyenne V'_{ANC} de cette tension.

2) Tracer l'allure de v_{BN} . Déterminer l'expression de la valeur moyenne V'_{BNC} de cette tension.

3) Dédurre de ce qui précède l'expression de la valeur moyenne U'_C de u .

3) Dédurre de ce qui précède l'expression de la valeur moyenne U'_C de u .



Pour le montage PD3 tout thyristors ci-contre, on pose $e_1 = E\sqrt{2}\sin\theta$, $e_2 = E\sqrt{2}\sin(\theta - 2\pi/3)$ et $e_3 = E\sqrt{2}\sin(\theta - 4\pi/3)$ avec $E = 220V$.

1) Pour $\alpha = 90^\circ$, tracer les allures de u , v_{T1} et i_1 .

2) Pour α quelconque, déterminer les expressions de la valeur moyenne U'_C de u , de la valeur efficace I_1 de i_1 et du facteur de puissance f'_s au secondaire.

A.N.: L'angle α pouvant varier entre 0 et 150° , calculer les valeurs extrêmes que peut prendre U'_C et les valeurs correspondantes de f'_s .

11) Le montage qu'on se propose d'étudier (voir schéma ci-dessous) comporte en particulier un transformateur à deux secondaires triphasés indépendants pour lequel on note $n = N_2/N_1$ et $n' = N'_2/N_1$ les rapports des nombres de spires. On donne $n = 0,3$, $n' = \sqrt{3} n$ ainsi que la tension d'alimentation entre phases du primaire $U = 400\text{kV}$.

1) Etude du redresseur PD3

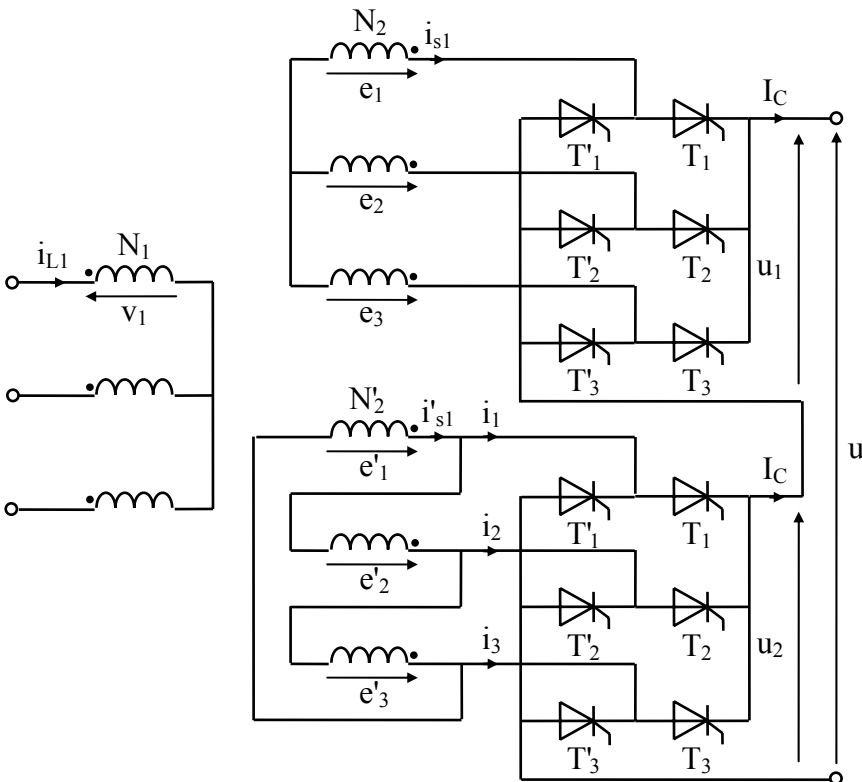
On pose $e_1 = E\sqrt{2}\sin\theta$, $e_2 = E\sqrt{2}\sin(\theta - 2\pi/3)$ et $e_3 = E\sqrt{2}\sin(\theta - 4\pi/3)$.

- Pour $\alpha = 30^\circ$, déterminer les intervalles de conduction des thyristors puis tracer les allures de u_1 et de i_{s1} .
- Pour α quelconque, déterminer l'expression de la valeur moyenne U'_{1C} de u_1 . Mettre celle-ci sous la forme $U_{1C}\cos\alpha$ en donnant l'expression de U_{1C} en fonction de n et de U . A.N.: Calculer U_{1C} .

2) Etude du redresseur S3

On pose $e'_1 = E'\sqrt{2}\sin\theta$, $e'_2 = E'\sqrt{2}\sin(\theta - 2\pi/3)$ et $e'_3 = E'\sqrt{2}\sin(\theta - 4\pi/3)$.

- Pour $\alpha = 30^\circ$, déterminer les intervalles de conduction des thyristors puis tracer les allures de u_2 , i_1 , i_3 et de i'_{s1} .



- Justifier le fait que les allures de u_1 et de u_2 sont identiques à un décalage de 30° près. En déduire que la valeur moyenne U'_{2C} de u_2 est égale à U'_{1C} .

3) Etude du montage global

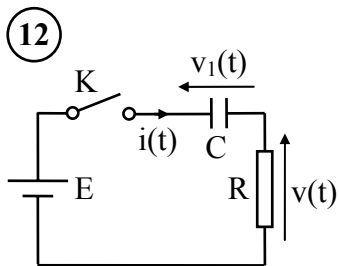
- Pour $\alpha = 30^\circ$, tracer les allures de u et de i_{L1} .
- Mettre la valeur moyenne U'_C de u sous la forme $U_C\cos\alpha$ en donnant l'expression littérale de U_C en fonction de n et de U . A.N.: Calculer U_C .
- Soit φ_1 le déphasage entre v_1 et le fondamental de i_{L1} . Quelle relation simple existe-t-il entre φ_1 et α ?
- On pose I_1 la valeur efficace du fondamental de i_{L1} . Déterminer les expressions des puissances active P_a et réactive

Q_a au primaire du transformateur en fonction de U , I_1 et α .

- Le système étant supposé sans pertes, P_a est égale à la puissance $P = U'_C I_C$ à la sortie du redresseur. En déduire l'expression de I_1 en fonction de n et de I_C . A.N.: Pour $P = 500\text{MW}$ et $U'_C = 300\text{kV}$, calculer I_C , α , I_1 et Q_a . Sachant que la valeur efficace I_{L1} de i_{L1} est donnée par la relation $I_{L1} = \sqrt{\frac{2}{3}}(2 + \sqrt{3})nI_C$, calculer I_{L1} et les puissances apparente S_a et déformante D_a correspondantes.

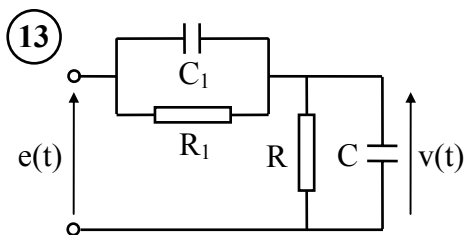
f) Du fait des puissances mises en jeu, chaque élément de pont est en réalité constitué par une association en série et/ou en parallèle de thyristors. Compte tenu des contraintes de courant et de tension et des possibilités actuelles des thyristors, quelle pourrait être la structure de chaque branche?

Exercices sur la transformée de Laplace



Soit le montage ci-contre. Au temps $t=0$, v_1 étant égal à 0, on ferme l'interrupteur K.

- 1) Tracer le schéma opérationnel.
- 2) En posant $\tau = RC$, déterminer l'expression de $V(p)$, en déduire celle de $v(t)$.
- 3) Esquisser l'allure de $v(t)$. Justifier, par un raisonnement physique, sa valeur initiale ainsi que celle en régime établi.



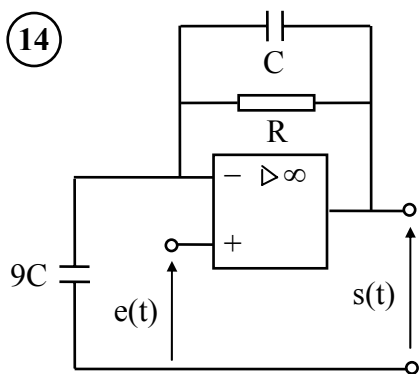
1) Déterminer l'expression de la fonction de transfert opérationnelle $T(p) = V(p)/E(p)$ du circuit ci-contre.

2) Mettre $T(p)$ sous la forme $K \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_2 p}$ en donnant les expressions de

K , τ_1 et τ_2 en fonction de R , R_1 , C et C_1 .

3) Déterminer la réponse à un échelon de tension d'amplitude E . Esquisser son allure pour les trois cas suivants: $\tau_2 = 0,5\tau_1$ $\tau_2 = \tau_1$ $\tau_2 = 2\tau_1$.

4) Donner l'expression de $\underline{T}(j\omega)$. Application: Pour $K=0,1$, $\tau_1=0,01s$ et $\tau_2=0,1s$, tracer les diagrammes asymptotiques de gain et de phase.

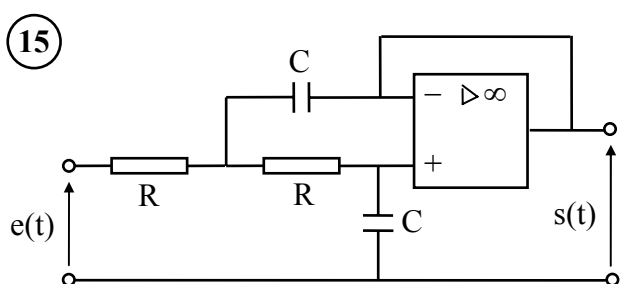


1) Déterminer la fonction de transfert opérationnelle $T(p) = S(p)/E(p)$ du circuit ci-contre et la mettre sous la forme $\frac{1 + 10\tau p}{1 + \tau p}$ avec $\tau = RC$.

2) Application:

a) Donner l'expression de $\underline{T}(j\omega)$. Tracer les diagrammes asymptotiques de gain et de phase correspondants.

b) $e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E . Déterminer l'expression de $s(t)$ et esquisser son allure.

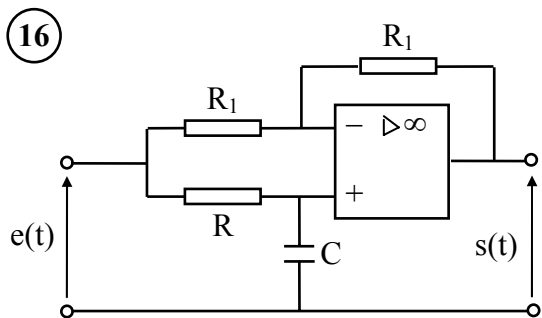


1) Déterminer la fonction de transfert opérationnelle $T(p) = S(p)/E(p)$ du circuit ci-contre et la mettre sous la forme $\frac{1}{(\tau p + 1)^2}$ en donnant l'expression de τ .

2) Application:

a) Donner l'expression de $\underline{T}(j\omega)$. Tracer les diagrammes asymptotiques de gain et de phase correspondants.

b) $e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E . Déterminer l'expression de $s(t)$. En déduire les valeurs de $s(0)$ et $s(\infty)$. Retrouver directement ces résultats à l'aide des théorèmes aux limites.

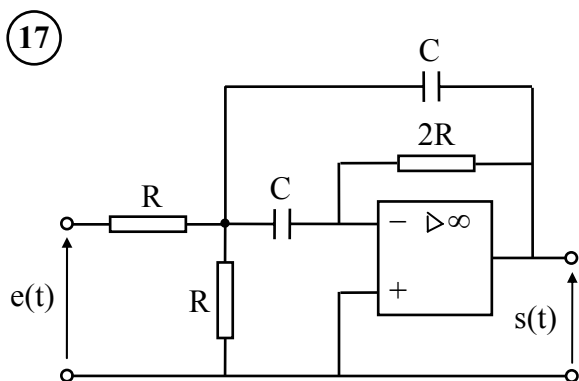


1) Déterminer l'expression de la fonction de transfert opérationnelle $T(p) = S(p)/E(p)$ du circuit ci-contre et la mettre sous la forme $\frac{1 - \tau p}{1 + \tau p}$ en donnant l'expression de τ .

2) Application:

a) Donner l'expression de $\underline{T}(j\omega)$. Que vaut son module? Exprimer d'autre part son argument en fonction de τ .

b) $e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E . Déterminer l'expression de $s(t)$ puis esquisser son allure.



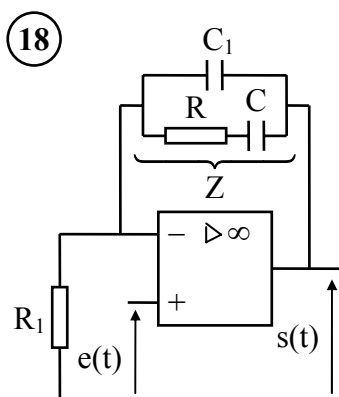
1) Déterminer l'expression de la fonction de transfert opérationnelle $T(p) = S(p)/E(p)$ du circuit ci-contre.

2) Application: $R = 1\text{M}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$, $e(t)$ est un échelon d'amplitude 1V.

a) Vérifier que $S(p)$ peut se mettre sous la forme

$$S(p) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \frac{2}{\sqrt{3}}$$

b) En déduire l'expression de $s(t)$ puis, à l'aide d'une calculatrice graphique, visualiser son allure pour $0 \leq t \leq 10\text{s}$.



Le circuit ci-contre est constitué en particulier par un amplificateur opérationnel supposé idéal.

1) En raisonnant dans un premier temps sur l'impédance Z équivalente au circuit R , C et C_1 , montrer que $S(p) = [1 + Z(p)/R_1] \cdot E(p)$. Remplacer ensuite $Z(p)$ par son expression en fonction des différents éléments pour obtenir la fonction de transfert $T(p) = S(p)/E(p)$ du circuit.

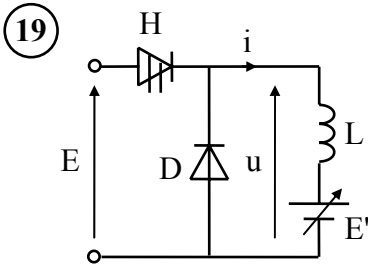
2) A.N.: $R = 1\text{M}\Omega$ $C = 0,7\mu\text{F}$ $R_1 = 367\text{k}\Omega$ $C_1 = 0,389\mu\text{F}$.

a) Vérifier que $T(p) \cong \frac{p^2 + 11p + 10}{p(p + 4)} = \frac{(p + 1)(p + 10)}{p(p + 4)}$.

b) Déterminer la réponse $s(t)$ si $e(t)$ est un échelon d'amplitude 1V. N.B.: On décomposera $S(p)$ sous la forme $\frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p + 4}$.

c) Pour $0,1\text{rad/s} \leq \omega \leq 100\text{rad/s}$, tracer les diagrammes asymptotiques de gain et de phase (éch.: $5\text{cm} = 1\text{décade}$ $1\text{cm} = 5\text{dB}$ $1\text{cm} = 20^\circ$).

Exercices sur les hacheurs



Soit le hacheur série ci-contre débitant sur une f.c.é.m. variable E' . On pose T la période du hacheur et α le rapport cyclique. On tient compte des variations instantanées du courant mais on suppose dans toute la suite que celui-ci reste ininterrompu.

1) Tracer l'allure de u . Déterminer l'expression de sa valeur moyenne U_C . En déduire la relation liant E , E' et α .

2) $0 \leq t \leq \alpha T$: H est passant. Ecrire l'équation différentielle régissant l'évolution de i . En posant $i(0) = I_0$, résoudre cette équation et déterminer l'expression de $i(t)$ en fonction de E , α , I_0 , L et t . Donner l'expression de $I_1 = i(\alpha T)$.

3) $\alpha T \leq t \leq T$: D est passante. En gardant 0 comme origine des temps, déterminer de même l'expression de $i(t)$. Vérifier que $i(T) = I_0$.

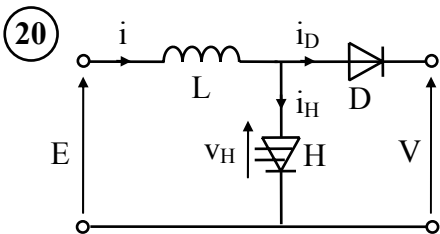
4) Esquisser l'allure de $i(t)$. Déterminer l'expression de sa valeur moyenne I_C en fonction de I_0 et de I_1 .

5) On suppose que le montage fonctionne à la limite du courant interrompu (soit $I_0 = 0$) et on pose I_{C0} la valeur moyenne correspondante du courant.

a) Exprimer I_{C0} en fonction de E , α , T et L .

b) Tracer la courbe $I_{C0} = f(\alpha)$. Préciser en particulier les coordonnées α_M et I_{C0M} du maximum.

c) Chaque point de fonctionnement du montage peut être caractérisé par le rapport cyclique α du hacheur et par la valeur moyenne I_C du courant débité. Compte tenu des résultats de la question précédente, préciser la zone dans le plan $(\alpha; I_C)$ où doit se trouver le point de fonctionnement pour que le courant soit ininterrompu.



On considère le hacheur parallèle ci-contre pour lequel on pose T la période et α le rapport cyclique.

1) $0 \leq t \leq \alpha T$: H est passant. Ecrire l'équation différentielle régissant l'évolution de i . En posant $i(0) = I_0$, résoudre l'équation pour déterminer $i(t)$. Donner l'expression de $I_1 = i(\alpha T)$.

2) $\alpha T \leq t \leq T$: Lorsque D est passante, en gardant 0 comme origine des temps, déterminer de même l'expression de $i(t)$ en fonction en particulier de I_0 .

3) On suppose que le montage fonctionne en courant ininterrompu (i ne s'annule pas sur l'intervalle $[\alpha T; T]$).

a) En écrivant que $i(T) = I_0$, retrouver la relation liant E , V et α .

b) Esquisser l'allure de $i(t)$. En déduire sa valeur moyenne I_C en fonction de I_0 et de I_1 .

c) On pose $\Delta i = I_1 - I_0$. Exprimer Δi en fonction de E , L , α et T .

d) Déduire des deux relations précédentes les expressions de I_0 et de I_1 en fonction de I_C et de Δi .

e) Application: $E = 200V$ $\alpha = 0,25$ $L = 5mH$ $I_C = 10A$ $T = 1ms$.

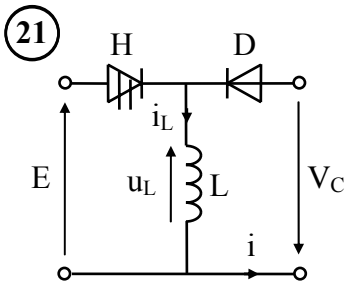
Calculer I_0 , I_1 et V , puis tracer les allures de i , i_H , i_D et v_H .

4) On suppose que le montage fonctionne en courant interrompu et on pose t_1 le temps compris entre αT et T au bout duquel le courant s'annule.

a) En reprenant l'expression obtenue au 2) et en tenant compte du fait que $I_0 = 0$, écrire la relation liant t_1 , E , V , α et T . En déduire l'expression de V en fonction de E , α , t_1 et T .

b) Esquisser les allures de i et de i_D . Soit I_{DC} la valeur moyenne de i_D . Déterminer la relation liant I_{DC} , t_1 , α , E , L et T . En déduire l'expression de t_1 en fonction de I_{DC} , α , E , L et T .

c) Dédurre des deux questions précédentes l'expression de V en fonction de E , α , T , L et I_{DC} . Application: Pour $\alpha = 0,25$, calculer la valeur moyenne maximale I_{DCM} de I_{DC} pour laquelle le courant reste interrompu puis tracer la courbe $V = f(I_{DC})$ pour $I_{DCM}/10 \leq I_{DC} \leq I_{DCM}$.



21) Pour le hacheur à accumulation ci-contre, on pose T la période de fonctionnement et α le rapport cyclique.

1) On suppose i_L ininterrompu.

a) Donner les expressions de u_L lorsque H conduit, puis lorsque D conduit.

b) En écrivant que la valeur moyenne de u_L est nulle, déterminer l'expression de V_C en fonction de α et de E .

2) On suppose i_L interrompu.

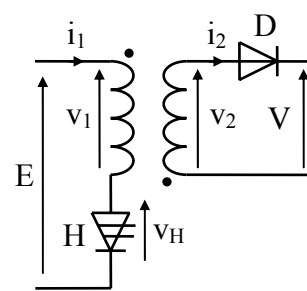
a) $0 \leq t < \alpha T$: H est passant. Déterminer l'expression de $i_L(t)$. En déduire celle de $I_1 = i_L(\alpha T)$.

b) $\alpha T \leq t < T$: Lorsque D conduit, en gardant 0 comme origine des temps, déterminer la nouvelle expression de $i_L(t)$ en fonction de V_C , L , t , E , α et T . Soit t_1 l'instant du blocage de D . En exploitant la condition $i_L(t_1) = 0$, déterminer l'expression de V_C en fonction de α , T , t_1 et E .

c) Esquisser l'allure de $i(t)$. En déduire l'expression de sa valeur moyenne I_C en fonction de t_1 , α , T , E et L .

d) On considère un fonctionnement à V_C constant. En éliminant t_1 entre les relations précédentes, déterminer l'expression de I_C en fonction de E , T , L , V_C et α . A.N.: $E = 10V$, $V_C = 8V$, $T = 50\mu s$, $L = 100\mu H$. Calculer la valeur maximale α_M de α pour que le montage fonctionne en courant interrompu puis tracer la courbe $I_C = f(\alpha)$ pour α compris entre 0 et α_M .

22) On a schématisé ci-dessous un montage de type Flyback fournissant une tension V parfaitement lissée. Le transformateur, supposé idéal, est, vu les orientations choisies, caractérisé par les équations aux induc-



$$\text{tances} \begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \text{ avec } M = \frac{N_2}{N_1} L_1 \text{ et } L_2 = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 L_1, \text{ où } N_1 \text{ et } N_2$$

désignent les nombres de spires au primaire et au secondaire. On note ϕ son flux par spire en rappelant que, toujours vu les orientations choisies, on a $R\phi = N_1 i_1 + N_2 i_2$ (R réluctance du circuit magnétique).

L'interrupteur H est commandé à l'état passant avec une période $T = 10\mu s$ et un rapport cyclique α . Par ailleurs, on donne $E = 300V$, $L_1 = 2mH$ et $N_1/N_2 = 60$.

1) Entre 0 et αT , H est passant. Que valent v_1 et i_2 ? En partant alors des équations du transformateur, déterminer l'expression de $i_1(t)$ en fonction de E , L_1 , t et d'une constante A .

2) Entre αT et T , et tant que D conduit, que valent v_2 et i_1 ? Compte tenu de ceci, déterminer de même l'expression de $i_2(t)$ en fonction de V , L_2 , t et d'une constante B .

3) On admet dans tout ce qui suit que le montage fonctionne en démagnétisation complète. Le courant i_2 s'annule donc à un instant, noté t_1 , compris entre αT et T .

a) Que vaut ϕ juste avant l'amorçage de H ? En utilisant le fait que le flux ne peut pas subir de discontinuité, déterminer la valeur de $i_1(0)$, en déduire celle de A puis déterminer l'expression de $I_1 = i_1(\alpha T)$ en fonction de E , L_1 , α et T .

b) En se plaçant à l'instant de la commutation $H \rightarrow D$, utiliser la même propriété de ϕ pour obtenir l'expression

de $i_2(\alpha T)$ en fonction de N_1 , N_2 et I_1 . Esquisser ensuite l'allure de $i_2(t)$ sur une période et en déduire l'expression de sa valeur moyenne I_{2C} en fonction de t_1 , α , T , N_1 , N_2 et I_1 .

c) Lorsque D conduit, exprimer v_1 en fonction de V , L_2 et M , puis de V , N_1 et N_2 . Esquisser alors l'allure de v_1 sur une période, puis, en utilisant le fait que sa valeur moyenne est nulle, déterminer l'expression de $t_1 - \alpha T$ en fonction de N_1 , N_2 , α , T , V et E .

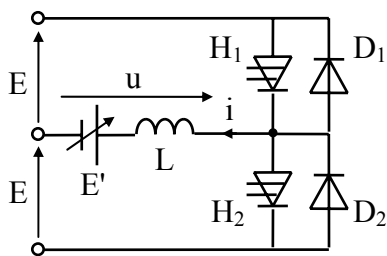
d) Eliminer $t_1 - \alpha T$ entre les deux relations précédentes pour obtenir l'expression de I_{2C} en fonction de E , α , V et I_1 , puis, compte tenu de a), de E , T , V , L_1 et α .

e) Application: On considère un fonctionnement à V constant et égal à 5V.

– Sachant qu'on limite α à 0,45, calculer la valeur correspondante de t_1 . Pour ce cas particulier, tracer les allures de v_1 , v_H , i_1 et i_2 (échelles 1cm = 1µs 1cm = 200V 1cm = 0,5A 1cm = 20A).

– Tracer la caractéristique de réglage $\alpha = f(I_{2C})$ pour I_{2C} variant entre 0,05A et 9A.

23 Soit un hacheur en demi pont débitant sur une f.c.é.m. E' variable (Cf figure ci-dessous). Les interrupteurs sont commandés de façon complémentaire avec un rapport cyclique α (H_1 est donc commandé à l'état passant entre 0 et αT , H_2 entre αT et T , où T désigne la période de fonctionnement du hacheur).



passant entre 0 et αT , H_2 entre αT et T , où T désigne la période de fonctionnement du hacheur).

1) Esquisser l'allure de u puis déterminer l'expression de sa valeur moyenne U_C . Quelle est la relation entre U_C et E' ? En déduire l'expression de E' en fonction de α et de E .

2) $0 \leq t \leq \alpha T$: H_1 ou D_1 conduisent. En posant $i(0) = I_0$, déterminer l'expression de $i(t)$, puis celles de $I_1 = i(\alpha T)$ et de $\Delta i = I_1 - I_0$.

3) $\alpha T \leq t \leq T$: H_2 ou D_2 conduisent. En gardant 0 comme origine des temps, déterminer l'expression de $i(t)$ en fonction en particulier de I_0 . Vérifier que $i(T) = I_0$.

4) En se plaçant par exemple dans le cas où $i(t)$ est toujours positif, esquisser l'allure de ce courant. En déduire l'expression de sa valeur moyenne I_C en fonction de I_0 et de I_1 .

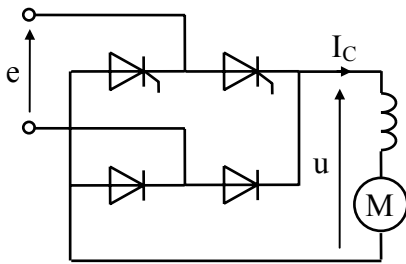
5) Déduire de ce qui précède les expressions de I_0 et de I_1 en fonction I_C et de Δi . A.N.: $E = 200V$, $L = 16mH$, $T = 1ms$, $\alpha = 0,8$. Calculer Δi puis, pour les 3 valeurs suivantes de I_C , 10A, 0A et -10A :

a) Calculer I_0 et I_1 et tracer les allures de u et de i en faisant apparaître les intervalles de conduction des différents éléments.

b) Pour $I_C = 10A$ et $I_C = -10A$, placer les points de fonctionnement correspondants dans le plan $(I_C; U_C)$. Préciser le mode de marche, récepteur ou générateur, de la charge.

Exercices sur les variateurs de vitesse pour machines à courant continu

24



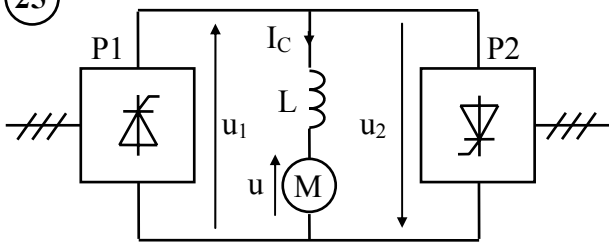
Soit le variateur de vitesse ci-contre. Le pont mixte fonctionne en courant ininterrompu, supposé parfaitement lissé pour simplifier. La valeur moyenne de u peut se mettre sous la forme $U'_C = U_C(1 + \cos\alpha)/2$ avec $U_C = 1200V$. Le moteur série est parfaitement compensé et on néglige les pertes autres que celles par effet Joule. On donne sa résistance totale induit+inducteur $R = 0,035\Omega$ et sa caractéristique $E_0 = f(I_C)$ pour $n = 1500tr/min$

$I_C(A)$	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$E_0(V)$	155	285	400	485	545	590	620	650	675

1) On pose $E_0 = K\Phi n$ avec $K\Phi$ terme proportionnel au flux inducteur qui dépend de I_C et n , fréquence de rotation exprimée en tours/minute. Déterminer la relation liant le couple moteur C à $K\Phi$ et à I_C . A.N.: Tracer la courbe $K\Phi(I_C)$, puis calculer le couple nominal C_N , correspondant à $I_C = I_N = 450A$ ainsi que le couple de démarrage C_D ($I_C = I_D = 900A$).

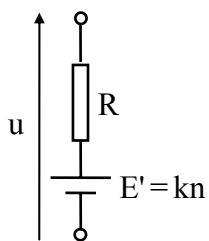
2) Ecrire la relation liant U_C , α , R , I_C , $K\Phi$ et n . Application: Calculer les valeurs qu'il faut donner à α pour obtenir les deux points de fonctionnement suivants: $C = C_D$ au démarrage et $C = C_N$ pour $n = 3000tr/min$.

25



Le montage ci-contre est constitué par un redresseur réversible fonctionnant sans courant de circulation et par une machine à excitation indépendante constante. Les deux ponts sont alimentés par le même réseau, ce qui, compte tenu du fait que le courant dans le moteur est ininterrompu, entraîne que $U'_{1C} = U_C \cos\alpha_1$ lorsque P1 conduit et que

$U'_{2C} = U_C \cos\alpha_2$ lorsque P2 conduit (α_1 et α_2 désignant les angles de retard à l'amorçage des thyristors de chaque pont). On prendra $U_C = 1500V$ pour les applications numériques.



On suppose que la machine fonctionne à flux constant. Elle peut donc être schématisée comme indiqué ci-contre avec $R = 0,022\Omega$ et $k = 0,83$ si n est exprimé en tours/minute (on rappelle que l'utilisation d'une convention de signe unique implique que n et I_C sont des grandeurs algébriques).

1) Exprimer la relation existant entre la valeur moyenne U'_C de u et les grandeurs R , I_C , k et n .

2) La machine fonctionne initialement dans le quadrant 1 ($n > 0$ $I_C > 0$).

a) Ecrire la relation liant U_C , α_1 , R , I_C , k et n .

b) Calculer la valeur qu'il faut donner à α_1 pour que le moteur tourne à 1500tr/min à vide ($R I_C$ négligeable devant les autres termes). Pour cette valeur de α_1 , calculer la fréquence de rotation à pleine charge ($I_C = 500A$) et la puissance fournie par le réseau.

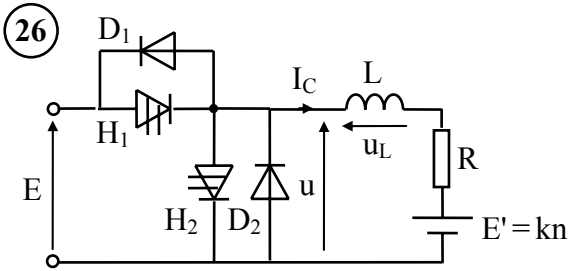
3) Pour inverser la vitesse de rotation, on bloque P1 et on débloque P2. Cette inversion ne pouvant pas se produire instantanément, le montage fonctionne transitoirement dans le quadrant 2 ($n > 0$ $I_C < 0$).

a) Ecrire la relation liant U_C , α_2 , R , I_C , k et n .

b) Pour le point de fonctionnement suivant, $I_C = -1000A$ et $n = 1500tr/min$, calculer α_2 et la puissance restituée

au réseau.

4) Lorsque la vitesse s'est inversée, la machine fonctionne dans le quadrant 3 ($n < 0$ $I_C < 0$). Calculer la valeur finale que doit prendre α_2 pour que $n = -1500$ tr/min à vide.



Soit le variateur de vitesse réversible ci-contre pour lequel on a $E = 200$ V, $R = 0,5\Omega$ et $k = 0,1$ V/(tr/min). Le courant d'induit est supposé parfaitement lissé. H_1 et H_2 sont commandés de façon complémentaire avec un rapport cyclique α et une période de T .

1) Préciser les éléments qui conduisent suivant le signe de I_C puis tracer l'allure de u_L . En écrivant que sa valeur moyenne est nulle, déterminer la relation liant E , α , R , I_C , k et n .

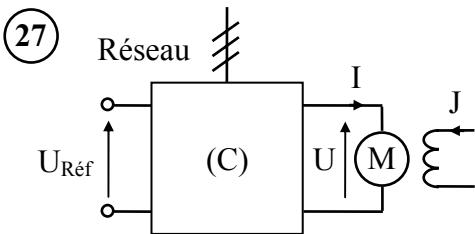
2) On note C le couple moteur développé par la machine et $k_T = C/I_C$ le coefficient de couple correspondant. Exprimer k_T en fonction de k puis calculer sa valeur numérique.

3) Le variateur est piloté en courant, c'est donc I_C qui est imposé par la consigne (positive pour un fonctionnement en moteur et négative pour un fonctionnement en frein). La charge développe un couple résistant de la forme $C_r + f \cdot n^2$ avec f constant et égal à $5 \cdot 10^{-6}$ si n est exprimé en tr/min.

a) En régime permanent (seul cas envisagé ici), déterminer la relation liant k_T , I_C , C_r , f et n .

b) Pour le fonctionnement en moteur suivant, $n = 1500$ tr/min et $C_r = 2$ Nm, déterminer la valeur qu'il faut donner à I_C . Calculer d'autre part celle que prend le rapport cyclique α .

c) Effectuer le même calcul pour un fonctionnement en frein avec $n = 500$ tr/min et $C_r = -15$ Nm.



Les caractéristiques du variateur ci-contre sont:

pour (C): convertisseur 5kW
avec $\begin{cases} U = kU_{Réf} & \text{pour } U_{Réf} \leq 10V \text{ (} k = 20 \text{)} \\ U = 200V & \text{pour } U_{Réf} > 10V \end{cases}$

pour (M): – caractéristiques nominales $I_N = 20$ A $J_N = 1$ A $n_N = 1500$ tr/min (valeurs à ne pas dépasser en régime permanent, seul cas envisagé ici)

– caractéristique à vide pour $n = 1500$ tr/min

J(A)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
E_0 (V)	0	90	150	190	210	220

– résistance d'induit $R = 1\Omega$

– pertes mécaniques négligeables.

1) On pose pour tout ce qui suit $E = Kn$ avec K coefficient proportionnel au flux inducteur (qui ne dépend donc que de J) et n fréquence de rotation en tr/min. Dédurre de la caractéristique à vide les valeurs de K correspondant aux différentes valeurs de J puis tracer la courbe $K = f(J)$ (éch.: 1cm = 0,1A 1cm = 0,01V/(tr/min)).

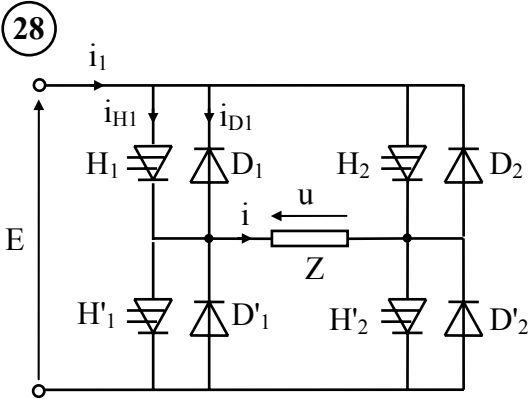
2) Déterminer la relation liant le couple moteur C à K et à I . A.N.: Pour $J = J_N$ et $I = I_N$, calculer la valeur C_N de C . Justifier le fait que C_N constitue la valeur maximale de couple que l'on peut obtenir.

3) Déterminer la relation liant U , R , I , K et n . A.N.: Pour $J = J_N$, $n = 1000$ tr/min et $C = C_N$, calculer U et $U_{Réf}$.

4) Fonctionnement à flux constant $J = J_N$: Calculer la valeur maximale n_1 que peut prendre n si on veut que la machine puisse fournir en permanence le couple C_N .

- 5) Fonctionnement à flux variable: Pour les valeurs suivantes de n , 1300tr/min, 1400tr/min et 1500tr/min, déterminer la valeur de J permettant d'obtenir le couple le plus élevé possible (donc celui correspondant à I_N), ainsi que la valeur correspondante de ce couple.
- 6) Soit C_{\max} la valeur maximale de couple que l'on peut obtenir pour une fréquence de rotation n donnée. Compte tenu des résultats précédents, tracer, pour $0 \leq n \leq 1500\text{tr/min}$, la caractéristique $C_{\max} = f(n)$ (échelles: $1\text{cm} = 2\text{Nm}$ $1\text{cm} = 100\text{tr/min}$). Préciser sur la courbe la zone de fonctionnement à flux constant et celle à flux variable.
- 7) La charge oppose un couple résistant de la forme $C_r = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot n^2$.
- a) Tracer la courbe $C_r = f(n)$ en la superposant à la précédente. Déterminer la valeur maximale de n pouvant être obtenue ainsi que les valeurs correspondantes de U et de J .
- b) On impose les conditions suivantes: $n = 1000\text{tr/min}$, pertes Joule induit minimales. En déduire que J doit être égal à J_N , puis calculer U et $U_{\text{Réf}}$.

Exercices sur les onduleurs



L'onduleur de tension représenté ci-contre fonctionne en onde rectangulaire avec une période notée T. On donne $E = 200V$.

1) Z est une charge passive quelconque

a) En faisant apparaître sur la courbe les intervalles de commande des interrupteurs, tracer l'allure de $u(t)$.

b) On note u_1 le fondamental de u . Sachant que sa valeur crête est égale à $4E/\pi$, superposer u_1 à u puis calculer sa valeur efficace U_1 .

2) Z est une inductance pure L

a) $0 \leq t \leq T/2$: En posant $I_0 = i(0)$, déterminer l'expression de $i(t)$.

En déduire celle de $I_1 = i(T/2)$.

b) $T/2 \leq t \leq T$: En gardant 0 comme origine des temps, déterminer de même l'expression de $i(t)$ en fonction en particulier de I_0 .

c) Sachant que la valeur moyenne de i est nulle, déterminer l'expression de I_0 puis tracer les allures de u et de i en faisant apparaître sur la courbe les intervalles de conduction des différents éléments. Représenter d'autre part les allures de i_{D1} , i_{H1} et i_1 .

3) Z est constituée par un circuit RLC série, avec $R = 10\Omega$, $L = 0,1H$ et $C = 10\mu F$

On admet dans tout ce qui suit que i se réduit à son fondamental noté $I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$ avec $\omega = 2\pi/T$.

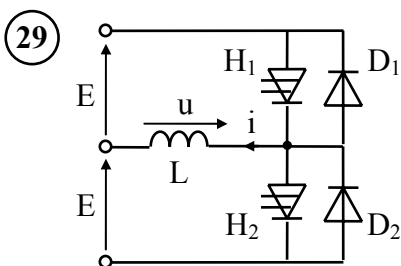
a) Déterminer l'expression de l'impédance $Z(j\omega)$ de la charge. En déduire

– l'expression de I_1 en fonction de U_1 , R , L , C et ω

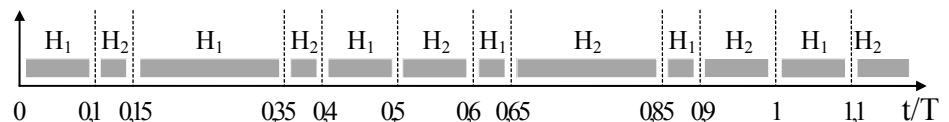
– l'expression de φ en fonction de R , L , C et ω .

b) La période T de l'onduleur est réglée de telle sorte que ω soit égale à la pulsation de résonance, notée ω_0 , du circuit de charge. Calculer ω_0 , T, I_1 et la valeur crête de la tension aux bornes du condensateur.

c) Pour des périodes d'onduleur successivement telles que $\omega = 0,95\omega_0$, puis $\omega = 1,05\omega_0$, calculer I_1 et φ . Tracer ensuite les allures de u et de i en faisant apparaître sur les courbes les intervalles de conduction des différents éléments. Préciser le régime de commutation des interrupteurs pour chaque cas.



Pour l'onduleur en demi-pont ci-contre on donne $E = 100V$, $L = 0,1H$ et $T = 0,1s$. Les intervalles de commande des interrupteurs sont représentés en valeur relative sur la figure ci-dessous.



1) Représenter l'allure de u (échelles: $1cm = 0,01s$ $1cm = 25V$).

2) Pour les deux valeurs possibles de u , calculer la pente $\Delta i/\Delta t$ de i .

3) Compte tenu des résultats précédents et sachant que $i(0) = -15A$, déterminer graphiquement l'allure de i (superposer la courbe à celle représentant u en prenant comme échelle $1cm = 5A$). En déduire les intervalles de conduction de chaque élément.

- 30 Soit un onduleur de tension triphasé débitant sur une charge équilibrée couplée en étoile (figure 1). Les intervalles de commande de chaque interrupteur sont décalés de $T/3$ comme indiqué sur la figure 2.

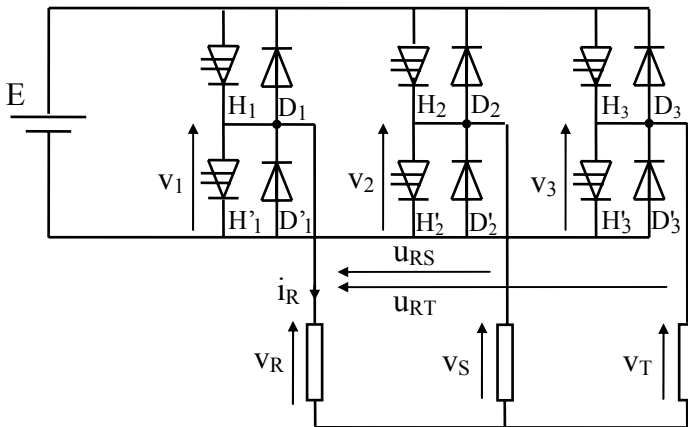


figure 1

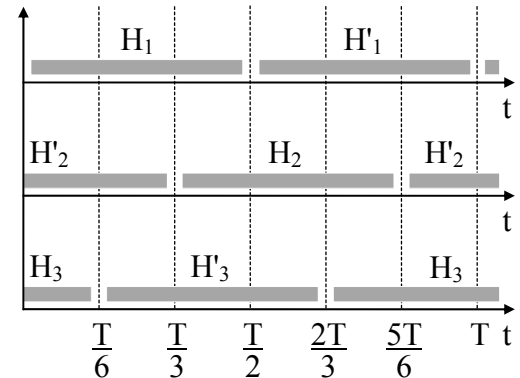


figure 2

- 1) Représenter les allures de v_1 , v_2 et v_3 . En déduire celle de u_{RS} .
- 2) La charge étant équilibrée, on a $v_R + v_S + v_T = 0$. Compte tenu de cette relation et de celles existant entre les tensions simples et les tensions entre phases, montrer que $v_R = (u_{RS} + u_{RT})/3$. En déduire l'expression de v_R en fonction de v_1 , v_2 et v_3 puis tracer son allure.
- 3) Le courant i_R a pour équation $i_R = I_M \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{T}{6}\right)\right]$. Superposer son allure à celle de v_R . Préciser sur la courbe les intervalles de conduction de H_1 , D_1 , H'_1 et D'_1 .
- 4)a) Les tensions v_1 , v_2 et v_3 étant périodiques, on peut les décomposer en série de Fourier sous la forme

$$v_1(t) = V_{1C} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{1n}(t), \quad v_2(t) = V_{2C} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{2n}(t) \quad \text{et} \quad v_3(t) = V_{3C} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{3n}(t).$$

- Montrer que $V_{1C} = V_{2C} = V_{3C} = E/2$.
- Vu l'origine des temps choisie, $v_{1n}(t)$ peut se mettre sous la forme $V_n \sqrt{2} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$. En utilisant le fait que $v_2(t) = v_1(t - T/3)$ et que $v_3(t) = v_1(t - 2T/3)$, donner les expressions correspondantes de $v_{2n}(t)$ et de $v_{3n}(t)$. Vérifier que
 - * pour n multiple de 3, $v_{1n} = v_{2n} = v_{3n}$.
 - * pour n non multiple de 3, $v_{1n} + v_{2n} + v_{3n} = 0$ (dans ce but, on considérera les cas particuliers $n = 1$ et $n = 5$, pour lesquels on montrera que les harmoniques de v_1 , v_2 et v_3 forment des réseaux triphasés équilibrés, et on admettra ensuite le résultat pour n quelconque).

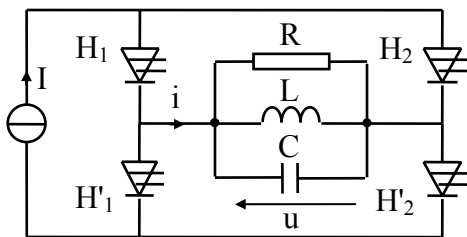
- b) Dans l'expression finale de v_R obtenue au 2), remplacer v_1 , v_2 et v_3 par leurs expressions en fonction de E , v_{1n} , v_{2n} et v_{3n} pour obtenir la décomposition en série de Fourier de v_R . Constaté que v_R ne comporte pas de terme constant, puis montrer que
 - v_R ne contient pas d'harmoniques multiples de 3
 - le fondamental et les harmoniques non multiples de 3 de v_R sont respectivement égaux aux termes correspondants de v_1 .

Application: On donne le développement en série de Fourier de v_1 :

pas d'harmoniques pairs
 harmoniques impairs de valeur efficace $V_n = \frac{\sqrt{2}E}{\pi n}$

Pour $E = 500V$, calculer le fondamental et les harmoniques de v_R en se limitant au rang 9.

31 Le commutateur ci-dessous fonctionne en onde rectangulaire avec une période $T = 10ms$. On donne



$I = 1A$, $R = 100\Omega$ et $L = 0,04H$.

1) Tracer l'allure de i .

2) Le développement en série de Fourier de i ne contient que des harmoniques impairs, de valeur efficace $I_n = I_1/n$, où I_1 désigne la valeur efficace du fondamental, qui vaut $2\sqrt{2} I/\pi$. Calculer I_1 , I_3 et I_5 .

3)a) Déterminer l'expression de l'admittance $\underline{Y}(j\omega)$ de la charge.

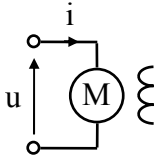
b) On veut que la pulsation de fonctionnement $2\pi/T$ de l'onduleur soit égale à la pulsation de résonance ω_0 du circuit de charge. Calculer la valeur qu'il faut donner au condensateur. Pour cette valeur de C :

– Calculer les modules de \underline{Y} pour $\omega = \omega_0$, $\omega = 3\omega_0$, $\omega = 5\omega_0$.

– Calculer les harmoniques U_1 , U_3 et U_5 de la tension u . En déduire que celle-ci se réduit pratiquement à son fondamental et tracer son allure.

Exercices sur les asservissements

32) Soit une machine à courant continu à excitation indépendante constante pour laquelle on donne la résistance d'induit $R=0,5\Omega$, la constante de f.c.é.m. $k=1Vs/rad$, le courant maximal admissible en régime transitoire $I_D=40A$ et le moment d'inertie total de la partie tournante $J=0,13kg\cdot m^2$. On pose C_e le couple électromagnétique de la machine, C_r le couple résistant opposé par la charge et C_p le couple de pertes.



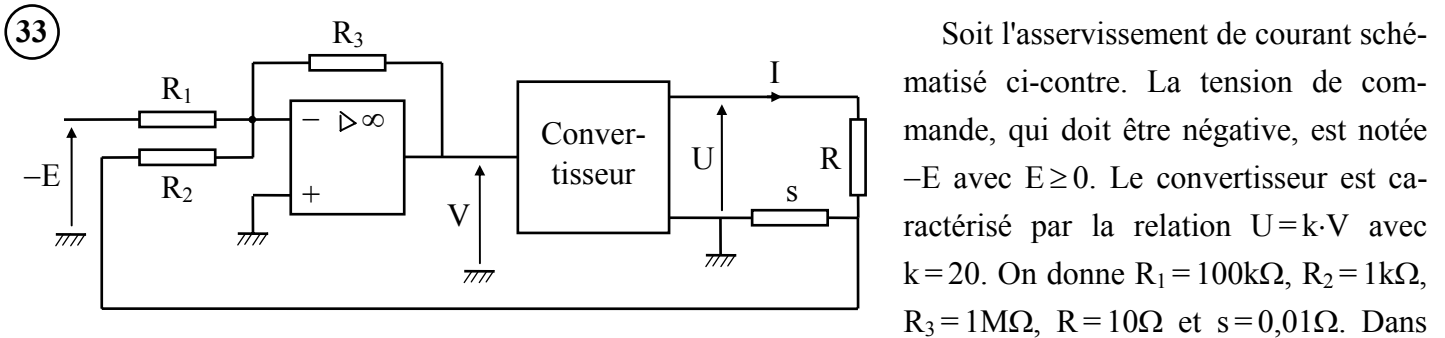
Quelles que soient les conditions de fonctionnement, on utilise la convention moteur (rappelée ci-contre), ce qui implique en particulier que C_e est algébrique.

- 1) Déterminer l'expression de C_e en fonction de k et de i .
- 2) En régime transitoire, écrire la relation liant J , $d\Omega/dt$, C_e , C_r et C_p puis celle obtenue en remplaçant C_e par son expression en fonction de i .
- 3) Dans tout ce qui suit, les couples C_r et C_p sont supposés indépendants de la vitesse de rotation (couples "constants").

a) Déterminer l'expression de $\Omega(t)$ dans le cas d'un démarrage à courant constant $i=I_D$. En déduire l'expression du temps t_0 mis pour atteindre une vitesse de rotation Ω_0 donnée.

A.N.: $\Omega_0=150rad/s$ et $C_p=1Nm$, calculer t_0 pour $C_r=0$ (démarrage à vide) et $C_r=19Nm$ (démarrage à pleine charge).

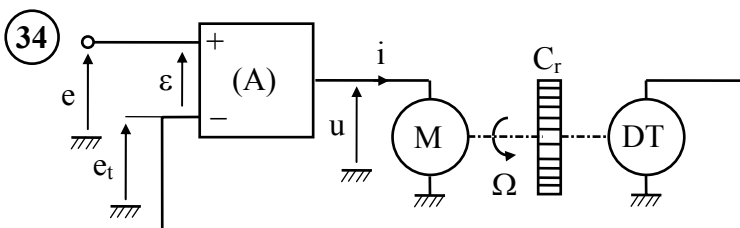
b) En posant Ω_0 la vitesse initiale de rotation, déterminer de même l'expression de $\Omega(t)$ dans le cas d'un freinage à courant constant $i=-I_D$. En déduire le temps t_1 au bout duquel le moteur s'arrête. A.N.: $\Omega_0=150rad/s$ et $C_p=1Nm$, calculer t_1 pour $C_r=0$ et $C_r=19Nm$. Calculer d'autre part la durée du ralentissement si le freinage n'était dû qu'aux seuls couples de pertes (soit $i=0$ et $C_r=0$).



Soit l'asservissement de courant schématisé ci-contre. La tension de commande, qui doit être négative, est notée $-E$ avec $E \geq 0$. Le convertisseur est caractérisé par la relation $U=k \cdot V$ avec $k=20$. On donne $R_1=100k\Omega$, $R_2=1k\Omega$, $R_3=1M\Omega$, $R=10\Omega$ et $s=0,01\Omega$. Dans

tout ce qui suit, on tient compte du fait que s est très petit devant R_2 et R , ce qui entraîne que $U=RI$ et que le courant dérivé par R_2 est négligeable devant I .

- 1) Déterminer la relation liant V , E et I . Mettre celle-ci sous la forme $V=A(E-R_0I)$ en donnant les expressions de A et de R_0 en fonction de R_1 , R_2 , R_3 et s . A.N.: Calculer A et R_0 .
- 2) Compte tenu des autres relations régissant le fonctionnement du dispositif, tracer le schéma fonctionnel correspondant. En déduire l'expression de I en fonction en E puis tracer la courbe $I=f(E)$ pour $0 \leq E \leq 15Volts$.



Soit l'asservissement de vitesse ci-contre. On donne: (A) amplificateur différentiel d'amplification réglable A , (M) servomoteur de résistance d'induit $R=5\Omega$ et de constante de f.c.é.m. $k_m=0,02Vs/rad$, (DT) dynamo tachymétrique de

constante $k_t=0,02Vs/rad$. On pose $J=2 \cdot 10^{-6}kg\cdot m^2$ le moment d'inertie total de la partie tournante et C_r le

couple résistant total supposé constant, dont la valeur maximale, notée C_{rM} , vaut $4 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$.

I) Etude en régime permanent: e est une tension continue de valeur E

1) Ecrire les équations régissant le fonctionnement du système. En déduire en particulier l'expression de Ω en fonction de u et de C_r puis tracer le schéma fonctionnel.

2) Déterminer l'expression de Ω en fonction de E et de C_r .

3) Application: Pour $A = 1$, puis pour $A = 100$, calculer

- la valeur qu'il faut donner à E pour que $\Omega = \Omega_0 = 250 \text{ rad/s}$ lorsque $C_r = 0$
- la valeur correspondante de Ω lorsque C_r est égal à C_{rM}
- la valeur commune du courant d'induit lorsque $C_r = C_{rM}$.

II) Etude en régime transitoire: e est un échelon de tension d'amplitude E appliqué au système initialement au repos. On se limite dans tout ce qui suit au cas du fonctionnement à vide (soit $C_r = 0$).

1) On suppose ici que le système fonctionne en permanence dans son domaine linéaire.

a) Déterminer l'expression de $\Omega(p)$ en fonction de $U(p)$ puis tracer le nouveau schéma fonctionnel.

b) En posant $\Omega_0 = \frac{AE}{k_m + Ak_t}$ et $\tau = \frac{RJ}{k_m(k_m + Ak_t)}$, déterminer l'expression de $\Omega(p)$, puis celle de $\Omega(t)$. En

déduire l'expression du temps de réponse t_r du système. A.N.: Calculer t_r pour $A = 1$ et pour $A = 100$.

c) Déterminer l'expression du courant de démarrage I_D du moteur en fonction de A , E et R . Sachant que l'amplificateur limite son courant de sortie à $I_M = 2 \text{ A}$, calculer, pour $A = 1$ et $A = 100$, l'amplitude maximale que l'on peut donner à E si on veut que l'hypothèse de départ soit effectivement vérifiée.

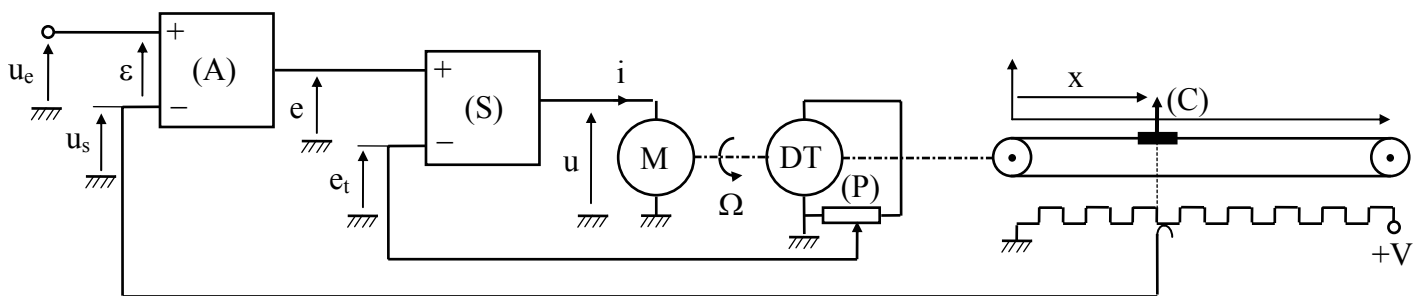
2) A étant égal à 100, on applique à l'entrée un échelon d'amplitude telle qu'en régime permanent on ait $\Omega = \Omega_0 = 250 \text{ rad/s}$.

a) Vérifier que, dans un premier temps, l'amplificateur fonctionne en limitation de courant (le courant i est donc égal à I_M).

b) Déterminer dans ces conditions l'équation d'évolution de $\Omega(t)$.

c) L'étude complète montre que cette évolution s'arrête pour une valeur de Ω supérieure à 95% de Ω_0 . Compte tenu de ceci, calculer le temps de réponse du système.

35 On a représenté ci-dessous le schéma de principe d'un asservissement destiné à positionner horizontalement une charge (C). (A) est un amplificateur différentiel parfait d'amplification $A = 1000$ et (S) un soustracteur supposé également parfait.



Les relations entre les différentes grandeurs sont notées comme suit

pour le moteur: $E' = k_m \cdot \Omega$ avec $k_m = 0,02 \text{ Vs/rad}$

pour le capteur de vitesse: $e_t = a \cdot \Omega$ avec a variant entre 0 et a_M suivant la position du curseur de (P)
 $a_M = 0,1 \text{ Vs/rad}$

pour le capteur de position: $u_s = b \cdot x$ avec $b = 20 \text{ V/m}$

pour la conversion mouvement circulaire-translation: $dx/dt = c \cdot \Omega$ avec $c = 5 \cdot 10^{-4}$ m/rad.

Par ailleurs, on donne le moment d'inertie total $J = 10^{-6}$ kg·m² ramené sur l'axe moteur, la résistance d'induit $R = 5\Omega$, et on admet que tous les couples résistants sont négligeables.

1) On ne s'intéresse pour le moment qu'au sous ensemble formé par (S), (M) et (DT).

a) Déterminer l'expression du couple moteur C_m en fonction de k_m , R , u et Ω .

b) Compte tenu des relations supplémentaires imposées par la boucle de vitesse, mettre C_m sous la forme $\lambda \cdot e - F \cdot \Omega$. A.N.: Calculer λ , puis F pour $a = 0$ et $a = a_M$.

2) On suppose dans tout ce qui suit que les conditions initiales sont nulles. Déterminer la relation liant J , $d\Omega/dt$, λ , e , F et Ω , puis celle, correspondante, faisant intervenir les transformées de Laplace de Ω et de e . Traduire cette dernière sous forme de bloc fonctionnel.

3) En utilisant le bloc défini à la question précédente, déterminer le schéma fonctionnel correspondant au montage complet.

4) Dans toute cette partie, la tension u_e est un échelon d'amplitude $U_0 = 2V$.

a) Déterminer l'expression de $X(p)$ et vérifier qu'on peut mettre cette dernière sous la forme

$$X(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{X_0}{p} \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{A\lambda cb}{J}}, m = \frac{1}{2\omega_0} \frac{F}{J} \text{ et } X_0 = \frac{U_0}{b}.$$

A.N.: Calculer ω_0 et la valeur en cm de X_0 . Déterminer également la relation numérique liant m à F .

b) On rappelle les expressions de la transformée inverse $x(t)$ de $X(p)$:

$$m < 1: \quad x(t) = \left\{ 1 - e^{-m\omega_0 t} \left[\cos(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t) + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t) \right] \right\} X_0$$

$$m = 1: \quad x(t) = \left[1 - e^{-\omega_0 t} (\omega_0 t + 1) \right] X_0$$

$$m > 1: \quad x(t) = \left[1 - \frac{m + \sqrt{m^2 - 1}}{2\sqrt{m^2 - 1}} e^{-\omega_0 (m - \sqrt{m^2 - 1}) t} + \frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{2\sqrt{m^2 - 1}} e^{-\omega_0 (m + \sqrt{m^2 - 1}) t} \right] X_0$$

Compte tenu de ceci, calculer m sans correction tachymétrique (soit $a = 0$), puis déterminer l'expression numérique en cm de $x(t)$. Tracer son allure pour t compris entre 0 et 0,1s et en déduire le dépassement et le temps de réponse du système (si possible, utiliser une calculatrice graphique pour faire cette étude).

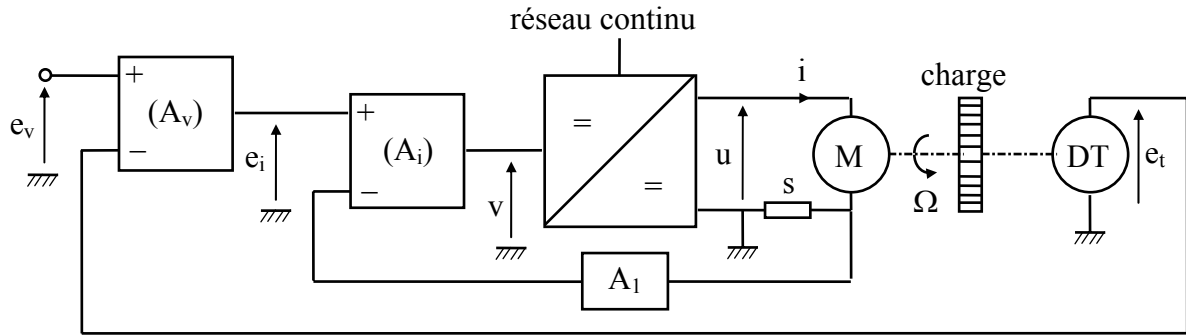
c) Calculer la valeur de F , puis celle, notée a_c , de a pour laquelle on obtient le régime critique (soit $m = 1$). Pour cette valeur de a , effectuer la même étude qu'au b).

5) Vérifier que la fonction de transfert en chaîne ouverte du montage peut se mettre sous la forme

$$\underline{L}(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_1} \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2} \right)} \text{ avec } \omega_1 = \omega_0/2m \text{ et } \omega_2 = 2m\omega_0.$$

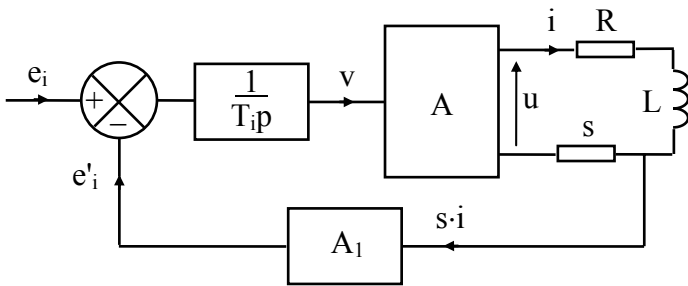
Application: Pour $1 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 4000 \text{ rad/s}$, et pour $a = 0$ puis pour $a = a_c$, tracer sur une même feuille les diagrammes asymptotiques de gain et de phase (échelles: $5 \text{ cm} = 20 \text{ dB}$ $5 \text{ cm} = 1 \text{ décade}$ $5 \text{ cm} = 100^\circ$). En déduire la marge de phase dans les deux cas.

36) Soit l'asservissement de vitesse avec boucle de courant schématisé ci-dessous.



I) Etude de la boucle de courant

Pour simplifier, on se limite au cas du moteur arrêté (celui-ci se réduit donc à son impédance interne). Par ailleurs, on admet que le convertisseur est linéaire et que le régulateur (A_i) est un simple intégrateur, de constante T_i=0,1s. En regroupant la résistance interne du convertisseur et la résistance d'induit du moteur, on peut, de ce fait, schématiser la boucle interne comme indiqué ci-contre, avec A=50, R=10Ω, L=30mH, s=5mΩ et A₁=150. Dans tout ce qui suit, on néglige s devant R.



stante T_i=0,1s. En regroupant la résistance interne du convertisseur et la résistance d'induit du moteur, on peut, de ce fait, schématiser la boucle interne comme indiqué ci-contre, avec A=50, R=10Ω, L=30mH, s=5mΩ et A₁=150. Dans tout ce qui suit, on néglige s devant R.

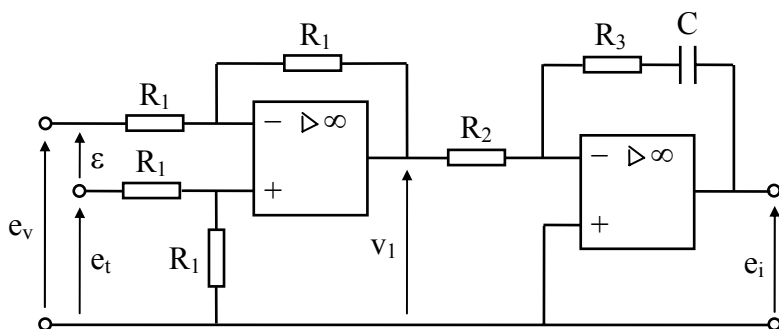
- 1) Calculer la constante de temps électrique T_e=L/R du circuit d'induit.
- 2) Ecrire la relation liant U(p), I(p), R, L et p. En déduire l'expression de la fonction de transfert I(p)/V(p) et la mettre sous la forme $\frac{G}{T_e p + 1}$ en calculant la valeur numérique de G.
- 3) Tracer le schéma fonctionnel complet de la boucle de courant. En déduire la fonction de transfert Y(p)=I(p)/E_i(p) du système en chaîne fermée.
- 4) Calculer les racines du dénominateur de Y(p) ainsi que les constantes de temps associées. Comparer ces dernières et en déduire qu'en première approximation, Y(p) peut se mettre sous la forme $Y(p) = \frac{Y_0}{\tau_i p + 1}$

donnant les valeurs numériques de Y₀ et de τ_i (N.B.: La détermination de Y₀ se fera en identifiant les deux expressions de Y(p) pour p=0).

Application: En utilisant l'expression simplifiée de Y(p), déterminer la réponse i(t) à un échelon de consigne d'amplitude E_i et calculer le temps de réponse de la boucle.

II) Etude de la boucle de vitesse

On note k_m=1,1Vs/rad la constante de f.c.é.m. du moteur, k_t=0,057Vs/rad la constante de f.é.m. de la dynamo tachymétrique et J=0,07kg.m² le moment d'inertie total ramené sur l'axe moteur. Le couple résistant C_r est supposé indépendant de la vitesse de rotation. Par ailleurs, on néglige dans tout ce qui suit le temps de réponse de la boucle de courant (on a donc simplement i=Y₀ e_i).



C_r est supposé indépendant de la vitesse de rotation. Par ailleurs, on néglige dans tout ce qui suit le temps de réponse de la boucle de courant (on a donc simplement i=Y₀ e_i).

- 1) Le régulateur de vitesse est constitué comme indiqué ci-contre. Déterminer la relation liant V₁(p) à ε(p) puis celle liant E_i(p) à V₁(p). En

déduire la fonction de transfert $E_i(p)/\varepsilon(p)$ et la mettre sous la forme $k \frac{\tau p + 1}{\tau p}$ avec $k = \frac{R_3}{R_2}$ et $\tau = R_3 C$.

2) Déterminer l'expression du couple moteur C_m en fonction de k_m et de i . Mettre celle-ci sous la forme $C_m = \lambda \cdot e_i$ en donnant l'expression de λ en fonction de k_m et de Y_0 . A.N.: Calculer λ .

3) Déterminer la relation liant J , p , $\Omega(p)$, λ , $E_i(p)$ et $C_r(p)$. Compte tenu des autres relations régissant le fonctionnement du système, tracer alors le schéma fonctionnel complet de la boucle de vitesse.

4) Déterminer la fonction de transfert en chaîne ouverte et la mettre sous la forme $L(p) = \frac{\tau p + 1}{(\tau_1 p)^2}$ en donnant

l'expression de τ_1 en fonction des paramètres du système.

Application: On impose $\tau = 1s$ et $\tau_1 = \tau/2 = 0,5s$. Calculer la valeur qu'il faut donner à k puis tracer les diagrammes asymptotiques de gain et de phase pour $0,1rad/s \leq \omega \leq 10rad/s$. En déduire une valeur approchée de la marge de phase du système.

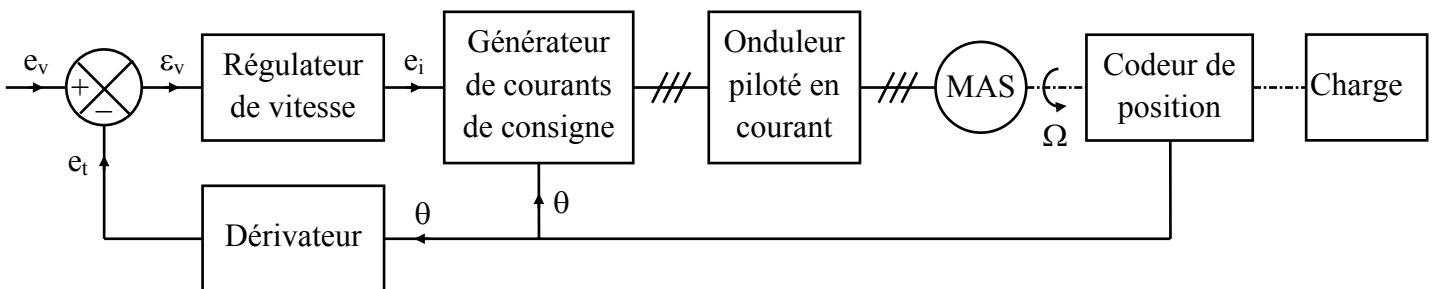
5) La consigne de vitesse étant fixée à zéro, on applique sur l'axe du moteur initialement immobile un échelon de couple d'amplitude C .

a) Montrer que la réponse du système peut se mettre sous la forme $\Omega(p) = -\frac{1}{1+L(p)} \frac{C_r(p)}{Jp}$.

b) Remplacer alors $L(p)$ par son expression en fonction de τ , τ_1 et p , $C_r(p)$ par son expression en fonction de C et de p , pour obtenir $\Omega(p)$ en fonction des mêmes grandeurs et de J .

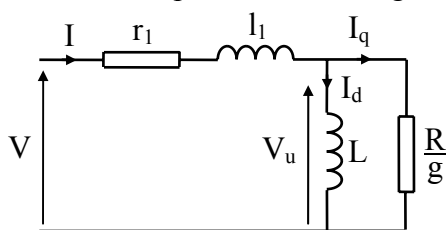
c) Application: $\tau = 1s$, $\tau_1 = 0,5s$ et $C = 14Nm$. Déterminer l'expression numérique de $\Omega(t)$ puis tracer son allure en précisant les coordonnées de son extremum.

37 On a représenté ci-dessous le schéma de principe d'un asservissement de vitesse pour machine asynchrone fonctionnant en contrôle vectoriel de flux. Le système réel utilise une régulation numérique, mais, pour l'étude, nous la transposerons en son équivalent analogique.



1) Etude en régime établi du circuit de puissance et de sa commande.

Ces éléments sont constitués par le générateur de courants de consigne, l'onduleur, le moteur asynchrone et le codeur de position. En désignant par I et V les fondamentaux (seuls pris en compte ici) de la tension simple et du courant en ligne, le moteur peut être étudié à l'aide du schéma équivalent ci-contre. On note ω la pulsation de fonctionnement de l'onduleur, $p_p = 2$ le nombre de paires de pôles de la machine et C_m son couple moteur, dont la valeur nominale C_N est égale à $5Nm$. Par ailleurs, on néglige l'ensemble des pertes mécaniques.



1) On rappelle que le contrôle vectoriel consiste à faire fonctionner la machine à I_d fixé et à ner à I_q une valeur fonction du couple moteur souhaité. Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que le fonctionnement à flux nominal, caractérisé par I_d constant et égal à $1,6A$.

a) Déterminer l'expression de la puissance électromagnétique mise en jeu et en déduire celle de C_m en fonction de p_p , L , I_d et I_q .

b) En partant de l'égalité $L\omega I_d = \frac{R}{g} I_q$, montrer que $\omega = p_p \Omega + \frac{R I_q}{L I_d}$.

c) Justifier le fait que $I = \sqrt{I_d^2 + I_q^2}$.

d) A.N.: $L = 0,44H$ $R = 5,6\Omega$. Pour $C = C_N$ et n (fréquence de rotation) = 1500tr/min, calculer I_q et ω . En admettant que le pilotage en courant de l'onduleur est parfait, donc que les grandeurs de sortie sont égales aux signaux de commande, en déduire la valeur efficace et la fréquence des courants de consigne.

2) Le courant I_q est relié à la tension e_i par un coefficient de mise à l'échelle Y_0 (soit $I_q = Y_0 \cdot e_i$). Déduire de la question 1)a) que le couple moteur peut se mettre sous la forme $C_m = \lambda \cdot e_i$ et calculer λ sachant que $Y_0 = 0,2S$.

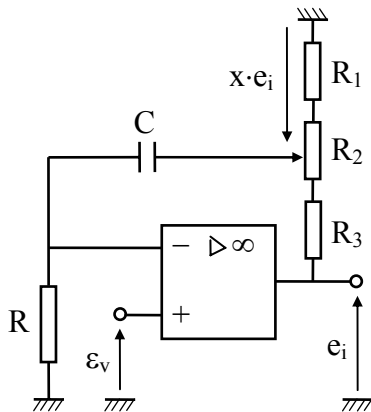
N.B.: Sauf indication contraire, on admettra que l'expression de C_m reste valable en régime transitoire de vitesse.

II) Etude de la boucle de vitesse

Dans toute cette partie, on se limite au cas du fonctionnement à vide. Le moment d'inertie total J de la partie tournante est égal à $0,04kg \cdot m^2$.

1) On note k_t le rapport e_t/Ω . Sachant que $e_t = 10V$ pour $n = 1500tr/min$, calculer la valeur de k_t en $V \cdot s/rad$.

2) Déduire de la loi fondamentale de la dynamique des systèmes en rotation et du résultat obtenu au 1)2) l'expression de $\Omega(p)$ en fonction de $E_i(p)$ puis montrer que la fonction de transfert $E_t(p)/E_i(p)$ peut se mettre sous la forme $1/\tau_v p$. A.N.: Calculer τ_v .



3) Le régulateur de vitesse constitué comme indiqué ci-contre avec $R_1 = 2,7k\Omega$, $R_2 = 10k\Omega$ et $R_3 = 120k\Omega$. On admet que les valeurs obtenues ultérieurement pour R et C sont telles que l'on puisse effectivement considérer que le diviseur formé par le potentiomètre R_2 et par les résistances R_1 et R_3 fonctionne à vide.

a) Déterminer sa fonction de transfert $T(p) = E_t(p)/\varepsilon_v(p)$.

b) Mettre $T(p)$ sous la forme $k \frac{1 + \tau p}{\tau p}$ avec $k = 1/x$ et $\tau = RC$.

A.N.: Calculer les valeurs extrêmes que peut prendre x et celles, correspondantes, de k .

4) En partant des fonctions de transfert obtenues dans les deux questions précédentes et en prenant e_t comme grandeur de sortie, tracer le schéma fonctionnel de l'asservissement.

5) Déterminer la fonction de transfert en chaîne fermée $E_t(p)/E_v(p)$. En déduire la relation que doivent vérifier k , τ et τ_v pour que le système fonctionne au régime critique. Cette relation est supposée vérifiée dans tout ce qui suit.

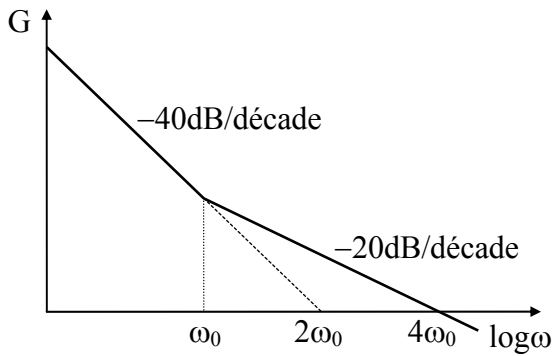
6) On tient compte ici du temps de réaction du circuit de puissance et de sa commande. Pour simplifier, on admet que ce sous-système est du premier ordre, ce qu'on traduit en écrivant que la relation entre $C_m(p)$ et $E_i(p)$ est maintenant de la forme $\lambda/(1 + \tau_c p)$ avec $\tau_c = 10ms$.

a) Vérifier que la fonction de transfert $E_t(p)/E_i(p)$ définie au 2) devient $\frac{1}{\tau_v p(1 + \tau_c p)}$ puis déterminer l'expres-

sion de la fonction de transfert en chaîne ouverte $L(p)$ du système complet.

b) En remplaçant k par son expression en fonction de τ et de τ_v , montrer que $\underline{L}(j\omega)$ se met sous la forme

$$\underline{L}(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{j\omega}{2\omega_0}\right)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_c}\right)} \text{ avec } \omega_0 = 1/\tau \text{ et } \omega_c = 1/\tau_c.$$



c) On impose que le diagramme asymptotique de gain coupe l'axe horizontal avec une pente de -20dB/décade . Sachant que le diagramme correspondant aux termes en ω_0 et en $2\omega_0$ se présente comme indiqué ci-contre, en déduire la valeur minimale que peut prendre ω_c . On choisit alors $\omega_c = 16\omega_0$. Calculer les valeurs correspondantes de τ et de k . Tracer ensuite les diagrammes asymptotiques de gain et de phase pour $0,4\text{rad/s} \leq \omega \leq 1600\text{rad/s}$ (éch: $5\text{cm} = 1 \text{ décade}$ $1\text{cm} = 10\text{dB}$ $1\text{cm} = 20^\circ$) et en déduire une valeur approchée de la marge de phase du système.

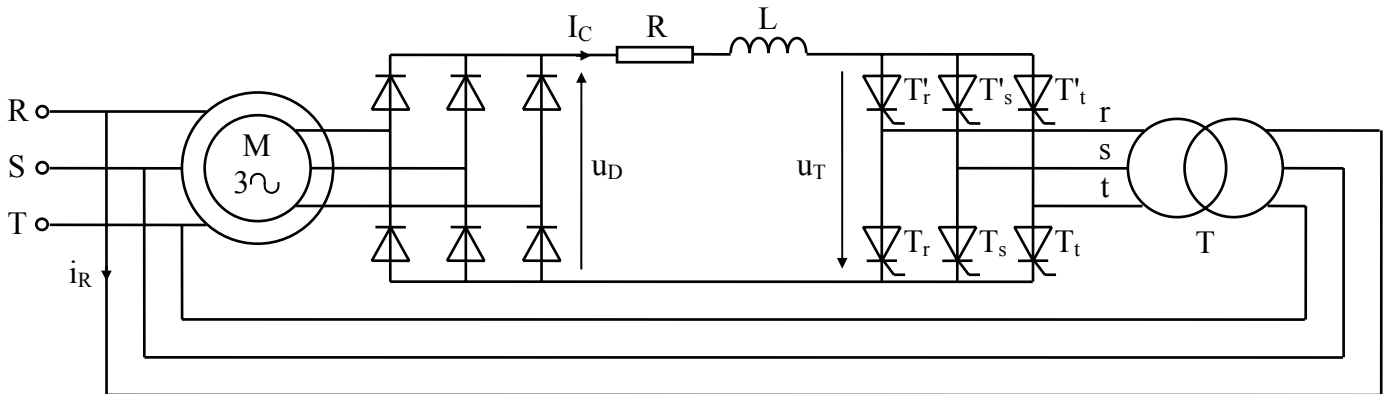
Exercices sur les variateurs de vitesse pour machines à courant alternatif

38 La cascade hyposynchrone représentée ci-dessous est alimentée par un réseau 3x380V 50Hz. Dans tout ce qui suit, V désigne la valeur efficace d'une tension simple de ce réseau.

I) Etude simplifiée du moteur asynchrone

Il s'agit d'une machine tétrapolaire à stator et rotor couplé en étoile. On néglige dans cette étude les pertes Joule au stator, les pertes magnétiques et les pertes mécaniques.

1) A l'arrêt, rotor ouvert, la tension entre bagues du rotor est de 314V. Calculer le rapport de transformation à l'arrêt m du moteur.



2) Au point de fonctionnement nominal, on a relevé la puissance absorbée $P = 140\text{kW}$, le courant en ligne $I = 250\text{A}$ et la fréquence de rotation $n = 1455\text{tr/min}$. Calculer:

- le facteur de puissance du moteur
 - la puissance réactive Q absorbée
 - le couple nominal C_N
 - le rendement pour ce point de fonctionnement.
- 3) Soit E_2 la valeur efficace de la force électromotrice d'une phase rotorique. Donner l'expression de E_2 en fonction de m , g et V .
- 4) Sachant que la résistance d'un enroulement rotorique est égale à $0,015\Omega$, calculer la valeur de la résistance additionnelle à mettre en série avec chaque phase du rotor pour obtenir une fréquence de rotation de 750tr/min lorsque le moteur développe le couple C_N . Que vaut le rendement pour ce point de fonctionnement?

II) Etude de la cascade hyposynchrone

Les réseaux d'alimentation des ponts redresseurs sont supposés directs. La résistance R , égale à $0,08\Omega$, matérialise l'ensemble des pertes Joule. Le transformateur T , supposé parfait, est couplé en étoile au primaire et au secondaire. Son rapport de transformation, noté m' , vaut $0,477$. Par ailleurs, on posera $U_0 = 3\sqrt{6}V/\pi$ dans tout ce qui suit.

1) Etude de la partie redresseur à diodes

- Esquisser l'allure de u_D puis montrer que sa valeur moyenne U_{DC} est égale à mgU_0 .
- Déterminer l'expression de la puissance p_2 prélevée au rotor (donc fournie par le redresseur à diodes) en fonction de m , g , U_0 et I_C .

2) Etude de la partie redresseur à thyristors

On note $v_r = m'V\sqrt{2}\sin\theta$, $v_s = m'V\sqrt{2}\sin(\theta - 2\pi/3)$ et $v_t = m'V\sqrt{2}\sin(\theta - 4\pi/3)$ les tensions simples au secondaire du transformateur T .

- Pour α (angle de retard à l'amorçage des thyristors) égal à 150° , tracer l'allure de u_T . Pour α quelconque,

déterminer l'expression de la valeur moyenne U_{TC} de u_T en fonction de m' , U_0 et α .

b) Soit v_R la tension simple correspondant à la phase R. Esquisser, en les superposant, les allures de v_R , i_R et du fondamental i_{Rf} de i_R . Vérifier que le déphasage φ_1 entre i_{Rf} et v_R est égal à α .

c) Soient P_1 et Q_1 les puissances active et réactive consommées par l'ensemble pont à thyristors + transformateur. Montrer que $P_1 = m'U_0I_C \cos\alpha$ et que $Q_1 = P_1 \tan\alpha$.

3) Etude du montage global

a) Déterminer la relation liant U_{DC} , U_{TC} , R et I_C . En déduire celle liant m , g , U_0 , m' , α , R et I_C .

b) En utilisant la puissance p_2 définie au II)1)b), déterminer la relation liant le couple moteur C au courant I_C . A.N.: Calculer la valeur I_{CN} de I_C correspondant à C_N .

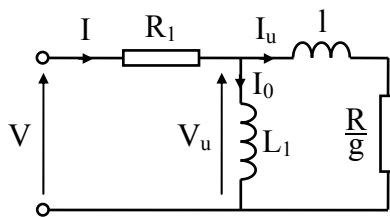
c) Calculer la valeur qu'il faut donner à α pour obtenir le point de fonctionnement en charge suivant: $C = C_N$, $n = 750 \text{tr/min}$. Pour cette valeur de α , calculer les puissances active P_1 et réactive Q_1 consommées par le pont à thyristors. En admettant que les puissances active et réactive consommées par le moteur restent celles calculées au D2), calculer les puissances active P_T et réactive Q_T totales fournies par le réseau d'alimentation. En déduire, en négligeant l'effet de la puissance déformante, le facteur de puissance du montage.

d) Reprendre les calculs du c) en supposant que l'on a supprimé le transformateur T (ce qui revient à prendre $m' = 1$ dans les calculs). Comparer le facteur de puissance obtenu dans ces conditions à celui que l'on avait précédemment et conclure sur l'utilité du transformateur.

e) En partant des relations obtenues au 3)a) et au 3)b), déterminer l'expression numérique de g en fonction de α et de C . A.N.: Pour $\alpha = 100^\circ$ et $\alpha = 150^\circ$, calculer les valeurs de g et de n obtenues pour $C = 0$ et $C = C_N$ puis tracer les caractéristiques $C = f(n)$ correspondantes.

39 Le problème porte sur un moteur asynchrone tétrapolaire alimenté par un onduleur de tension. On néglige les pertes ferromagnétiques et mécaniques et on donne les valeurs nominales suivantes $V_N = 220 \text{V}$, $f_N = 50 \text{Hz}$ et $n_N = 1440 \text{tr/min}$.

I) Etude du moteur en régime sinusoïdal permanent



La machine est caractérisée a priori par le schéma équivalent monophasé ci-contre pour lequel on donne $R_1 = 1\Omega$, $L_1 = 0,24 \text{H}$, $l = 20 \text{mH}$ et $R = 1,8\Omega$.

1) Simplification du schéma

a) Pour le point nominal, calculer les valeurs du produit $g\omega$, de R/g et du module de $R/g + j\omega l$. Sachant que $g\omega$ reste toujours inférieur ou égal à sa valeur au point nominal et que l'on s'intéresse essentiellement aux modules des résultats, en déduire que l'on peut négliger l'influence de l .

b) Tracer le schéma équivalent simplifié (celui-ci sera utilisé dans toute la partie I).

2) Caractéristiques au point nominal

a) Le calcul complet montre que V_u est alors égal à 215V . En déduire les valeurs de I_{0N} et I_{uN} .

b) Montrer que I_u et I_0 sont en quadrature. En déduire, par exemple à l'aide d'un diagramme, les valeurs de I_N et du déphasage φ' entre I_N et V_u .

c) Calculer la puissance électromagnétique mise en jeu. En déduire le couple nominal C_N .

d) Calculer la puissance absorbée par la machine et son facteur de puissance.

e) On définit le flux Φ , égal à $L_1 I_0$. Calculer Φ_N .

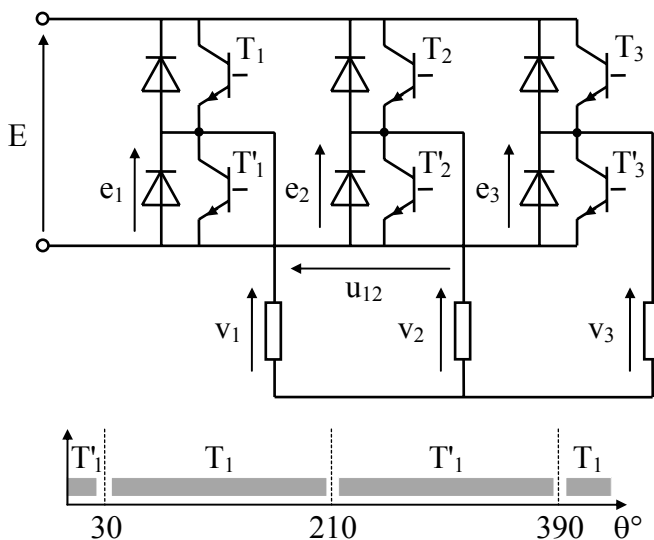
3) Fonctionnement à $\Phi = \Phi_N$ constant

Dans tout ce qui suit, on prend V_u comme origine des phases.

- a) Exprimer V_u en fonction de Φ_N et de ω .
- b) En partant de la puissance électromagnétique, et en tenant compte de la relation liant V_u , R , g et I_u , déterminer l'expression du couple moteur C en fonction de p , Φ_N , R et $g\omega$.
- c) Déterminer l'expression de \underline{I} en fonction de g , ω , R , L_1 et Φ_N , puis celle de \underline{V} en fonction de R_1 , \underline{I} , Φ_N et ω .
- d) Constaté que $g\omega$ ne dépend que de C , donc qu'il en est de même de \underline{I} . Application: Pour $C = C_N$ et les valeurs suivantes de f , 50Hz, 25Hz et 2Hz
 - Rappeler les valeurs communes de $g\omega$ et de \underline{I} .
 - Calculer les différentes valeurs de V et les comparer à celles que l'on obtiendrait avec une simple loi $V/f = C^{te}$.

II) Etude de l'onduleur de tension

Son schéma est représenté ci-contre. On raisonnera sur les angles électriques $\theta = \omega t$ avec $\omega = 2\pi/T$, pulsation de fonctionnement de l'onduleur.



1) Fonctionnement en onde rectangulaire

Nous n'avons représenté que les intervalles de commande de T_1 et de T'_1 . Ceux des autres éléments s'en déduisent par des décalages de 120° .

- a) Tracer les allures de e_1 , e_2 et u_{12} .
- b) On donne les éléments permettant de calculer le développement en série de Fourier de u_{12} :

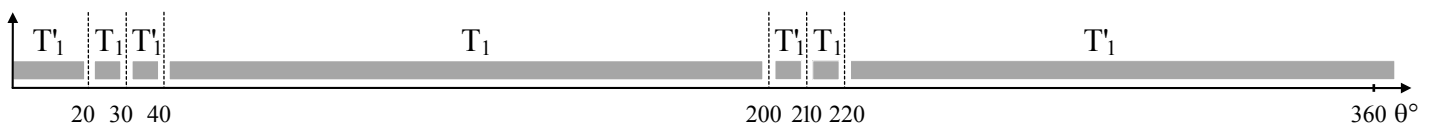
- * pas d'harmoniques pairs
- * amplitude des harmoniques impairs (de rang noté m): $C_m = \left| \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} u_{12}(\theta) \sin(m\theta) d\theta \right|$.

Déterminer l'expression de C_m en fonction de E et de m . En déduire les valeurs efficaces U_m et V_m des harmoniques de u_{12} et de v_1 .

- c) On impose $V_1 = 220V$. Calculer E et les harmoniques de v_1 jusqu'au rang 15.

2) Amélioration de la forme d'onde

Les intervalles de commande de T_1 et de T'_1 sont représentés ci-dessous. Les autres s'en déduisent par des décalages de 120° .



- a) De même, tracer les allures de e_1 , e_2 et u_{12} . Les composantes de u_{12} se calculant comme au 1)b), déterminer les nouvelles valeurs de U_m et de V_m .

- b) On impose $V_1 = 220V$. Calculer E et les harmoniques de v_1 jusqu'au rang 15.

c) Soit n le nombre d'angles mis en jeu (trois ici). Constaté que le découpage permet d'atténuer les harmoniques jusqu'à un rang de l'ordre de $2n$, mais qu'il amplifie les suivants (en fait, le phénomène se limite essentiellement aux deux ou trois premiers harmoniques non nuls immédiatement supérieurs).

3) Fonctionnement en MLI

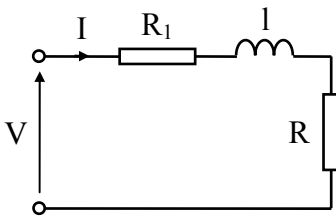
Le système comporte une double modulation: un découpage de base à neuf angles fixes, complété par une surmodulation (redécoupage à fréquence élevée de chaque créneau de base avec un rapport cyclique α varia-

ble).

a) Vu la remarque faite au 2)c), et en ne tenant pas compte de la surmodulation, quels sont les harmoniques que l'on peut s'attendre à trouver dans la tension de sortie?

b) En fait, il subsiste essentiellement les harmoniques 23, 25 et 29 (mais on ne tiendra pas compte de ce dernier). Par ailleurs, on admet pour simplifier que la surmodulation a pour effet de faire varier les valeurs efficaces des différentes composantes proportionnellement à α . On pose donc $V_1 = \alpha V_{t1}$, $V_{23} = \alpha V_{t23}$ et $V_{25} = \alpha V_{t25}$ où V_{t1} , V_{t23} et V_{t25} sont les valeurs en l'absence de surmodulation et valent respectivement 250V, 56V et 66V. Compte tenu de ceci, calculer la valeur qu'il faut donner à α pour avoir $V_1 = 220V$ et les valeurs correspondantes de V_{23} et de V_{25} .

III) Etude de l'association moteur+onduleur



Pour le fondamental, on conserve le schéma simplifié défini dans la question D)1)c). Pour les harmoniques, on utilise le schéma ci-contre, qui implique que le flux dans la machine ne dépend que du fondamental des grandeurs électriques. Dans tout ce qui suit, on admet que ces dernières évoluent de telle sorte que $\Phi = \Phi_N$ quelles que soient les conditions de fonctionnement.

N.B.: Ces hypothèses entraînent en particulier que les fondamentaux V_1 et I_1 de la tension et du courant ont pour valeur celle obtenue, dans les mêmes conditions, lors de l'étude en régime sinusoïdal permanent.

1) Fonctionnement aux valeurs nominales de couple et de fréquence

a) Rappeler les valeurs numériques de V_1 et de I_1 .

b) Soit Z_m l'impédance équivalente au circuit R_1, l, R pour l'harmonique de rang m . Déterminer l'expression numérique de Z_m en fonction de m , puis, pour les deux types d'onde définis au II)1) et au II)3), et en se limitant aux deux premiers harmoniques non nuls, calculer les valeurs efficaces des harmoniques de courant et celle du courant en ligne.

2) Fonctionnement à couple et fréquence variables

a) On rappelle que $V_1 = \alpha V_{t1}$ avec $V_{t1} = 250V$.

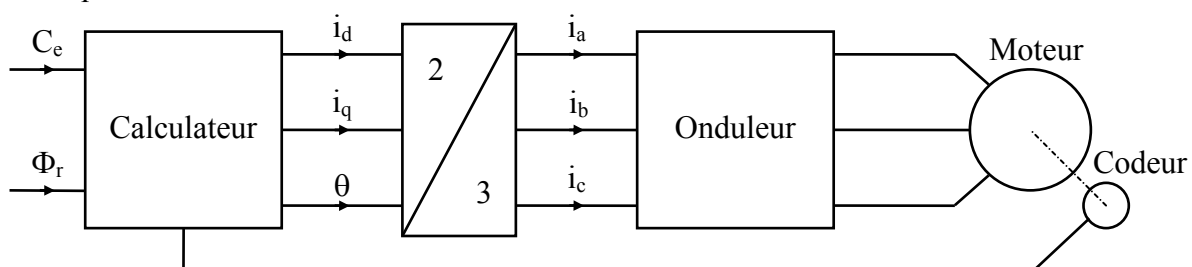
- Déduire des résultats établis au I)3)c) les valeurs que doit prendre α pour $f = 25Hz$ et $f = 2Hz$.
- En négligeant pour simplifier la chute de tension dans R_1 , calculer la fréquence maximale de fonctionnement pour laquelle la condition $\Phi = \Phi_N$ est respectée.

b) Déterminer la relation liant C , f et la fréquence de rotation n de la machine.

c) Le dispositif est complété par une régulation de vitesse, supposée parfaite, et agissant sur la fréquence de l'onduleur. Déterminer l'expression numérique de f en fonction de n et de C .

A.N.: Pour $n = 750tr/min$, calculer f à vide et pour $C = C_N$.

40 On a représenté ci-dessous la partie centrale d'un variateur pour machine asynchrone à contrôle vectoriel de flux rotorique.



L'onduleur est piloté en courant, ce qui signifie qu'il impose dans la machine des courants égaux aux valeurs de consigne i_a , i_b et i_c . Le moteur, de type à cage, possède les valeurs nominales suivantes: $U_N = 380\text{V}$ – 50Hz $I_N = 7,2\text{A}$ $n_N = 1425\text{tr/min}$. La transformation [2/3] est caractérisée par les relations $i_a = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_d \cos\theta - i_q \sin\theta)$, $i_b = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[i_d \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - i_q \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$ et $i_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[i_d \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) - i_q \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$, avec $\theta = \int_0^t \omega(u) du$ (l'origine des temps est donc telle que $\theta(0) = 0$) et $\omega = \frac{1}{\tau_r} \frac{i_q}{i_d} + p\Omega$ où τ_r désigne la constante de temps rotorique, p le nombre de paires de pôles et Ω la vitesse de rotation.

I) Dans tout ce qui suit, i_d et i_q sont supposés constants et on note I_d et I_q leurs valeurs.

1) Mettre i_a sous la forme $I\sqrt{2} \cos(\theta + \alpha)$ en donnant les expressions de $I \cos\alpha$ et $I \sin\alpha$ en fonction de I_d et de I_q .

2) Ecrire les expressions correspondantes de i_b et de i_c .

3) On suppose que l'évolution de la vitesse se fait à accélération constante. En traduisant ceci par $\Omega(t) = a \cdot t$, déterminer l'expression de $\theta(t)$. En déduire celle de i_a .

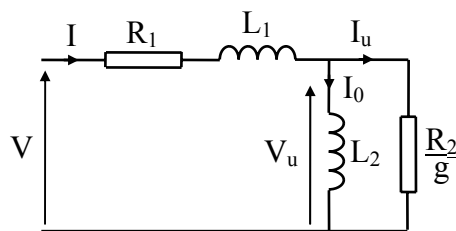
A.N.: $\tau_r = 0,16\text{s}$ $I_d = 4,5\text{A}$ $I_q = 11,5\text{A}$ $p = 2$ et $a = 300\text{rad/s}^2$. Calculer l'expression numérique de i_a puis, à l'aide d'une calculatrice graphique, visualiser son allure pour $0 \leq t \leq 0,5\text{s}$.

II) On se place dans le cas du régime établi. La vitesse Ω est alors également constante.

1) En déduire que ω est constant et que les courants i_a , i_b et i_c forment un système sinusoïdal équilibré direct.

2) On pose $i_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} I_d \cos\theta$ et $i_u = -\sqrt{\frac{2}{3}} I_q \sin\theta$. Déterminer les valeurs efficaces I_0 et I_u de ces courants en fonction de I_d et I_q et montrer que i_u est en quadrature avance sur i_0 .

3) Le fonctionnement du moteur en régime établi peut être décrit à l'aide du schéma équivalent ci-dessous, qui fait en particulier apparaître les courants I_0 et I_u définis ci-dessus. On donne $R_1 = 1\Omega$, $L_1 = 0,025\text{H}$, $R_2 = 1,4\Omega$ et



$L_2 = 0,225\text{H}$ et on note n la fréquence de rotation en tr/min.

a) Pour le point nominal $U = U_N$, $f = f_N$ et $n = n_N$, calculer l'impédance \underline{Z} du circuit. En déduire \underline{I} , \underline{V}_u , la valeur correspondante I_{0N} de I_0 et celle C_N du couple électromagnétique C .

b) Vérifier que \underline{I}_u est bien en quadrature avance sur \underline{I}_0 . En déduire que \underline{I}

s'écrit $I_0 + jI_u$ avec I_0 comme origine des phases (cette origine sera conservée dans tout ce qui suit).

c) L'évolution se fait à $I_0 = I_{0N}$ constant et en imposant I_u en fonction du couple.

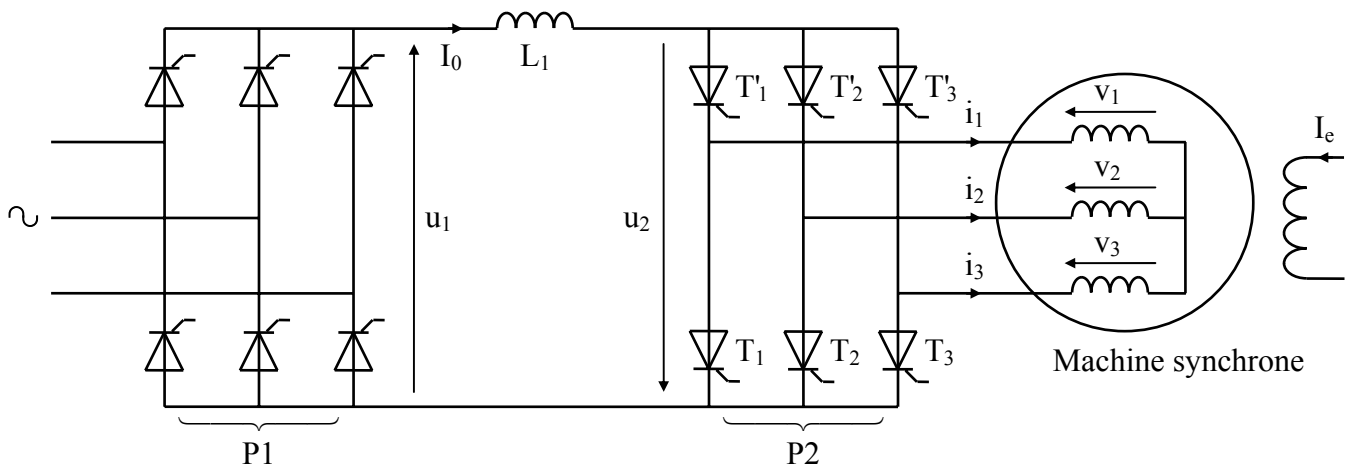
– Exprimer la puissance électromagnétique P_e en fonction de R_2 , g et I_u puis utiliser l'égalité des tensions aux bornes de L_2 et de R_2/g pour en déduire l'expression de C en fonction de p , L_2 , I_{0N} et de I_u . Que vaut I_u à vide si les pertes mécaniques sont négligeables?

– Réutiliser la même égalité pour déterminer l'expression de $g\omega$ en fonction de R_2 , L_2 , I_u et I_{0N} . En déduire celle de f en fonction des mêmes grandeurs, de p et de n .

– Déterminer l'expression de \underline{V} en fonction de R_1 , L_1 , ω , \underline{I} , L_2 et I_{0N} .

– A.N.: Pour $n = 1000\text{tr/min}$, calculer \underline{I} , f et U à vide, puis pour $C = C_N$.

41 L'étude porte sur quelques propriétés du variateur pour machine synchrone schématisé ci-après. Dans tout ce qui suit, on se limite au cas où la vitesse de rotation Ω de la machine est positive.



I) Etude de la machine synchrone

Son nombre de paires de pôles p est égal à 2. On néglige la résistance du stator ainsi que les pertes ferromagnétiques et mécaniques. On admet que le comportement peut être décrit à l'aide du modèle de Behn-Eschenburg pour lequel on désigne par L l'inductance synchrone et on met la f.é.m. à vide E_0 sous la forme $KI_e\Omega$ avec I_e , intensité du courant inducteur (Cf. schéma).

On note P la puissance absorbée, ω la pulsation de fonctionnement, V la valeur efficace commune des tensions v_1 , v_2 et v_3 , I celle des courants i_1 , i_2 et i_3 , et $I_N = 150\text{A}$ sa valeur nominale.

1) Des essais en génératrice pour $\Omega = 150\text{rad/s}$ ont donné:

à vide	$I_e = 50\text{A}$	$V = 225\text{V}$
en court-circuit	$I_e = 20\text{A}$	$I = I_N$.

a) Déduire de l'essai à vide que $K = 0,03\text{H}$.

b) En se plaçant dans les conditions de l'essai en court-circuit, exprimer L en fonction uniquement de K , I_e , p et I . A.N.: Vérifier que $L = 2\text{mH}$.

2) Dans tout ce qui suit, on utilise une convention récepteur et on note de plus P_e la puissance électromagnétique mise en jeu. Pour le point de fonctionnement suivant $\omega = 314\text{rad/s}$, $V = 230\text{V}$, $I = I_N$ et $P = 90\text{kW}$:

a) Que vaut P_e en fonction de P ? En déduire la valeur correspondante du couple électromagnétique C_e .

b) Déterminer les deux valeurs possibles du déphasage $\varphi = (\vec{I}, \vec{V})$, puis, pour chacune des deux,

- calculer la puissance réactive Q mise en jeu
- préciser si la machine est sous-excitée ou sur-excitée
- calculer E_0 et en déduire I_e .

3) Pour des valeurs quelconques des grandeurs électriques:

a) Tracer un diagramme vectoriel des tensions et y faire apparaître φ ainsi que le déphasage $\psi = (\vec{I}, \vec{E}_0)$.

b) Montrer que $V\cos\varphi = E_0\cos\psi$ et que $V\sin\varphi = E_0\sin\psi + L\omega I$.

c) En partant à nouveau de la puissance absorbée, et compte tenu d'une des deux relations précédentes, retrouver l'expression de P_e en fonction de E_0 , ψ et I . Préciser le mode de fonctionnement (moteur ou génératrice) en fonction de la valeur de $|\psi|$ par rapport à $\pi/2$. Compte tenu de la relation liant E_0 , K , I_e et Ω , déduire ensuite de P_e l'expression de C_e en fonction uniquement de K , I_e , ψ et I .

II) Etude du commutateur P2

Les thyristors sont amorcés tous les sixièmes de la période de fonctionnement T , dans l'ordre 1, 3', 2, 1', 3, 2', 1 etc... Pour chacun des groupes (1, 2, 3) et (1', 2', 3'), l'amorçage d'un thyristor bloque le précédent. On admet que les commutations sont instantanées et que le courant I_0 est parfaitement lissé.

Les tensions v_1 , v_2 et v_3 restent sinusoïdales et forment un réseau équilibré direct (rappel: leur valeur effi-

cace commune est notée V). Dans ce qui suit, on raisonne sur l'angle électrique $\theta = 2\pi t/T$. Par analogie avec le redressement commandé, on définit un angle de retard à l'amorçage α_2 , compté en prenant les tensions v_1 , v_2 et v_3 comme références.

1) Pour $\alpha_2 = 150^\circ$:

- Faire apparaître sur le graphe des tensions les intervalles de conduction des thyristors puis tracer l'allure de u_2 .
- Exprimer i_1 en fonction de I_0 lorsque T_1 conduit, puis lorsque T_1' conduit. Que vaut i_1 quand les deux thyristors sont bloqués? En déduire la représentation graphique de i_1 .
- On note i_f le fondamental de i_1 et I sa valeur efficace. En admettant que $I\sqrt{2} \cong I_0$, tracer l'allure de i_f en la superposant à celle de i_1 . En déduire la valeur du déphasage φ entre i_f et v_1 et vérifier sur ce cas particulier l'exactitude de la relation $\varphi = \alpha_2 - \pi$.

2)a) Pour α_2 quelconque, la valeur moyenne U_{2C} de u_2 vaut $2,34V\cos\alpha_2$. En déduire l'expression de U_{2C} en fonction de V et de φ .

b) Exprimer la puissance P absorbée par l'ensemble commutateur + machine synchrone en fonction de V , I_0 et φ .

c) Sachant que cette puissance s'écrit aussi $P = 3VI\cos\varphi$, montrer que $I \cong 0,780I_0$.

3) On note U_{1C} la valeur moyenne de u_1 . Exprimer U_{1C} en fonction de V et de φ , puis, compte tenu de la première relation établie au I)3)b), de E_0 et de ψ .

III) Etude du montage global

Les instants d'amorçage des thyristors du pont P2 sont élaborés à partir des signaux fournis par un capteur de position du rotor de telle sorte que l'angle ψ soit maintenu constant (ce qui entraîne par ailleurs que la fréquence de fonctionnement est asservie à la vitesse de rotation de la machine). On admet que les résultats obtenus au I) restent valables à condition de prendre pour le courant la valeur efficace de son fondamental.

On se limite ici au cas où Ω est assez élevé pour que le commutateur puisse fonctionner en commutation naturelle. Ceci suppose évidemment que φ garde en permanence une valeur suffisamment négative et implique qu'il en est de même pour ψ .

1) Déterminer les expressions de C_e en fonction de K , I_e , ψ et I_0 ainsi que de U_{1C} en fonction de K , I_e , ψ et Ω . Application: On veut que C_e soit le plus élevé possible et que son réglage ne dépende que de I_0 pour tout Ω inférieur ou égal à 157rad/s . Dans cette gamme de vitesse, on impose donc que $I_e |\cos\psi|$ reste constant et égal à la valeur maximale compatible avec la relation liant U_{1C} à Ω (rappel: $\cos\psi$ peut être positif ou négatif suivant le mode de fonctionnement, par contre, ψ est toujours négatif). Le cas le plus contraignant correspondant à $\alpha_1 = 150^\circ$, $\cos\psi$ négatif et $\Omega = 157\text{rad/s}$, déduire de l'expression de U_{1C} la valeur qu'il faut donner à $I_e\cos\psi$ pour le fonctionnement en génératrice.

N.B.: Pour le fonctionnement en moteur, on prendra évidemment l'opposé du résultat trouvé.

2) Montrer à l'aide des relations établies au I)3)b) que $I_e \sin\psi = I_e \cos\psi \tan\varphi - L_p I / K$. Application:

a) Vu l'hypothèse faite sur le mode de commutation de P2, on s'impose que $\varphi = -30^\circ$ pour le fonctionnement en moteur à courant nominal. En déduire la valeur de $I_e \sin\psi$, puis, compte tenu du résultat obtenu au 1), celles qu'il faut donner à I_e et à ψ .

N.B.: I_e garde cette valeur dans tout ce qui suit.

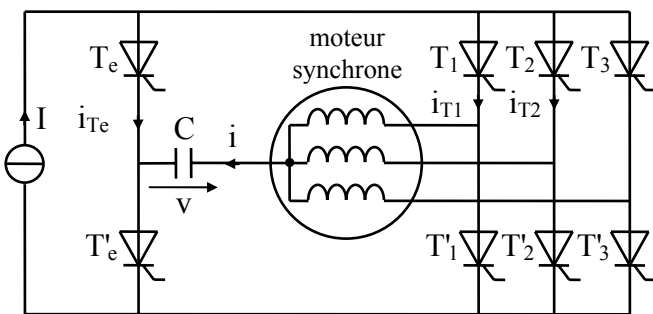
b) Calculer la valeur qu'il faut donner à ψ pour obtenir le fonctionnement en génératrice. En partant de E_0 , tracer alors un diagramme vectoriel des tensions et en déduire que les conditions pour la commutation naturelle sont d'autant mieux respectées ici.

3) Pour les deux cas, moteur et génératrice, donner les expressions numériques de C_e en fonction de I_0 et de

U_{IC} en fonction de Ω . Application:

- Discuter de l'analogie que l'on peut faire avec une machine à courant continu à excitation indépendante. Quels sont les avantages de la machine synchrone?
- Calculer la valeur maximale que peut prendre I_0 et la valeur correspondante de $|C_e|$.
- Pour $\Omega = 100 \text{ rad/s}$, et les deux valeurs suivantes de C_e , 400 Nm et -400 Nm , calculer
 - les valeurs communes de I_0 et de la fréquence de fonctionnement de l'onduleur
 - les valeurs de U_{IC} , α_1 et de la puissance $P_{rés}$ fournie ou récupérée par le réseau d'alimentation du pont P1.

42 On se propose d'étudier la commutation entre les thyristors T_1 et T_2 du variateur de vitesse représenté ci-dessous. Les hypothèses faites sont les suivantes:

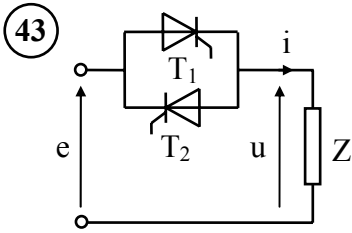


- La valeur initiale, notée V_0 , de la tension v est positive.
- Chaque phase du moteur est simplement équivalente à une inductance L , les autres d.d.p. étant supposées négligeables.
- Initialement, seuls T_1 et T_3 conduisent (le thyristor T_3 , qui assure le "retour" du courant I , conduit bien évidemment pendant tout l'intervalle de temps considéré).

1) A l'instant $t=0$, pris comme origine, on amorce le thyristor T_e .

- Redessiner le schéma "équivalent" de l'ensemble en ne faisant apparaître que les éléments participants à la conduction.
 - En étudiant en particulier la maille T_e , C , L et T_1 , déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de v .
 - Quelle est la valeur initiale de i ? Compte tenu de ceci et de la condition initiale sur v , déterminer les expressions de v , i et i_{T1} .
 - Soit t_1 le temps au bout duquel T_1 se bloque. Déterminer les expressions de t_1 et de $V_1 = v(t_1)$ en fonction de V_0 , I , L et C .
- 2) On considère maintenant l'intervalle de temps pendant lequel seuls T_e et T_3 conduisent.
- Tracer le schéma équivalent correspondant.
 - En prenant t_1 comme nouvelle origine des temps, déterminer l'expression de v en fonction, en particulier, de V_1 . En déduire celle de l'instant t_2 au bout duquel v est égal à $-V_1$.
- 3) A l'instant t_2 , pris de nouveau comme origine des temps, on amorce le thyristor T_2 . On ne considère ici que l'intervalle de temps pendant lequel T_e continue à conduire.
- Comparer le schéma équivalent à celui tracé au 1)a). Compte tenu de ceci et des nouvelles conditions initiales, déterminer les expressions de v , i , i_{T2} et i_{Te} .
 - Soit t_3 l'instant correspondant au blocage de T_e . Vérifier que $t_3 = t_1$ et que $v(t_3) = -V_0$.
- 4) A.N.: $I = 1200 \text{ A}$, $V_0 = 1800 \text{ V}$, $C = 235 \mu\text{F}$ et $L = 186 \mu\text{H}$. Calculer t_1 , V_1 et t_2 , puis tracer les allures de v , i , i_{T1} et i_{T2} (éch.: $1 \text{ cm} = 100 \mu\text{s}$ $1 \text{ cm} = 500 \text{ V}$ $1 \text{ cm} = 500 \text{ A}$).

Exercices sur les gradateurs



Soit le gradateur ci-contre pour lequel on donne $e = E\sqrt{2} \sin\theta$ avec $\theta = \omega_0 t$ et $E = 220\text{V}$. On désigne par α l'angle de retard à l'amorçage des thyristors.

I) Z est une résistance pure R

1) Pour $\alpha = 120^\circ$, tracer l'allure de u .

2) Pour α quelconque, déterminer l'expression de la valeur efficace U de u en fonction de E et de α . En déduire celle de la puissance active P fournie à la charge.

3) Application: Pour $R = 16\Omega$, tracer la courbe $P = f(\alpha)$.

II) Z est une inductance pure L

1) Soit α_0 la valeur minimale que peut prendre α pour que le montage puisse fonctionner en gradateur. Que vaut α_0 ici?

2) On se place dans le cas $\alpha \geq \alpha_0$.

a) Sachant que l'angle de conduction α_1 de chaque thyristor vaut alors à $2(\pi - \alpha)$, tracer l'allure de u pour $\alpha = 120^\circ$.

b) On note i_1 le fondamental de i , I_1 la valeur efficace de i_1 et φ_1 le déphasage entre i_1 et e . Dans le cas général, donner les expressions des puissances active P et réactive Q fournies par la source en fonction de E , I_1 et φ_1 . Que vaut P ici? En déduire que φ_1 est égal à $\pi/2$.

c) Le fondamental u_1 de u a pour valeur efficace $U_1 = E \left[2 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) + \frac{\sin(2\alpha)}{\pi} \right]$. Déterminer l'expression de I_1

en fonction de E , α , L et ω_0 . En déduire celle de Q .

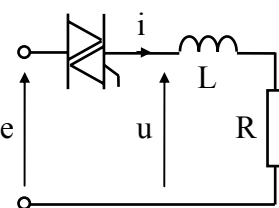
d) Application: Pour $L\omega_0 = 16\Omega$ et $\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi$, tracer la courbe $Q = f(\alpha)$.

3) On se place dans le cas $\alpha < \alpha_0$.

a) On suppose que les thyristors sont amorcés en commande longue. Les grandeurs u et i sont donc sinusoïdales, ce qui permet de confondre les fondamentaux et les grandeurs instantanées ($u_1 = u$, $i_1 = i$). Que vaut U_1 ? En déduire l'expression de I_1 en fonction de E et de $L\omega_0$ et calculer I_1 pour $L\omega_0 = 16\Omega$. Tracer ensuite les allures de u et de i et faire apparaître les intervalles de conduction des thyristors.

b) On suppose que les thyristors sont commandés par une impulsion de courte durée. En admettant que c'est T_1 qui conduit et sachant que son angle de conduction reste égal à $2(\pi - \alpha)$, tracer l'allure de u pour α très légèrement inférieur à $\pi/2$. Comparer cette courbe à celle obtenue dans le cas précédent. En conclure qu'ici, U_1 subit une chute brutale au passage de α par la valeur α_0 (N.B.: Le calcul donne $U_1 = E/2$ pour α voisin de $\pi/2$ par valeurs inférieures).

44 Pour le gradateur ci-dessous on donne $e = E\sqrt{2} \sin\theta$ avec $\theta = \omega_0 t$ et $E = 220\text{V}$.

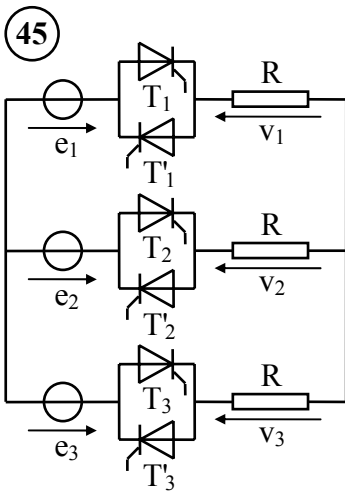


1) Le fondamental u_1 de u peut s'écrire $a_1 \sin\theta - b_1 \cos\theta$, les coefficients a_1 et b_1 valant alors $a_1 = \frac{E\sqrt{2}}{\pi} \left\{ \alpha_1 + \frac{\sin(2\alpha) - \sin[2(\alpha + \alpha_1)]}{2} \right\}$ $b_1 = \frac{E\sqrt{2}}{2\pi} \left\{ \cos[2(\alpha + \alpha_1)] - \cos(2\alpha) \right\}$.

Compte tenu de ceci, mettre u_1 sous la forme $U_1 \sqrt{2} \sin(\theta - \psi_1)$ en donnant les expressions de U_1 et de ψ_1 en fonction de a_1 et de b_1 .

2) On pose $i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\theta - \varphi_1)$ le fondamental de i . Exprimer les grandeurs I_1 et φ_1 en fonction de U_1 , R , ψ_1 et $\varphi = \text{Arctan}(L\omega_0/R)$. Application:

- Pour $\alpha = 90^\circ$, $R = 100\Omega$ et $L = 0$, calculer l'angle de conduction α_1 , U_1 , ψ_1 , I_1 et ϕ_1 , puis la puissance P dissipée dans la charge. En déduire la valeur efficace I de i et les puissances réactive Q , apparente S et déformante D fournies par e .
- Pour $\alpha = 90^\circ$, $R = 100\Omega$ et $L\omega_0 = 83,9\Omega$, α_1 vaut 127° . Effectuer les mêmes calculs.



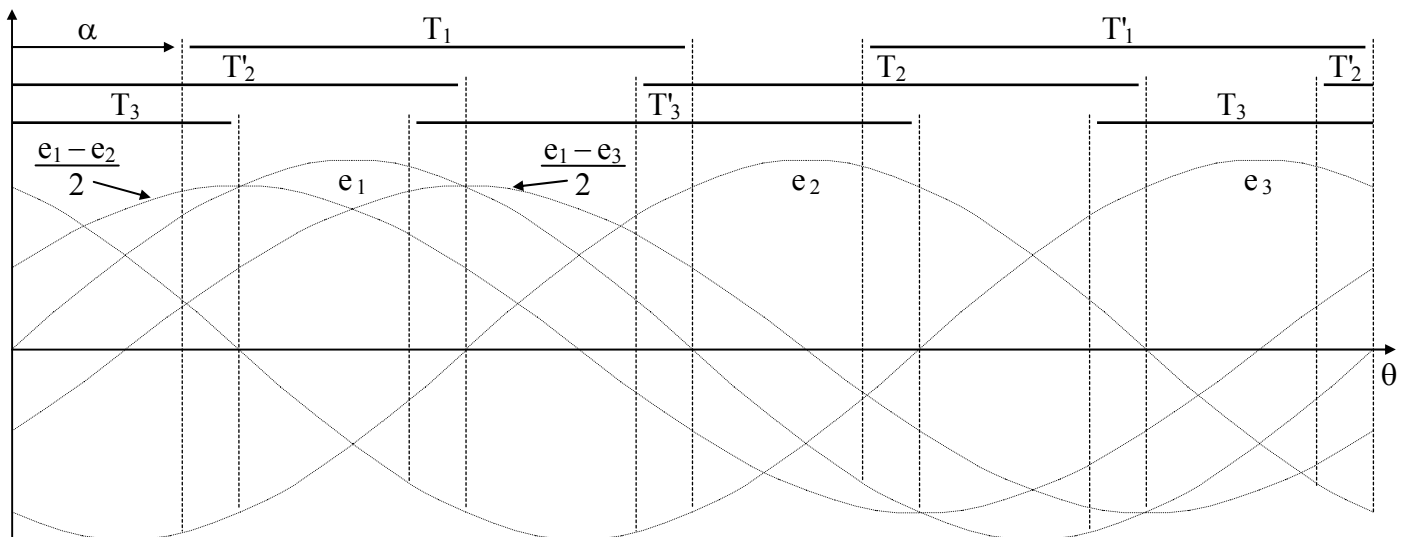
Soit le gradateur triphasé débitant sur une charge résistive équilibrée représenté ci-contre.

1) En raisonnant en termes d'interrupteurs bidirectionnels $K_i = [T_i; T'_i]$, déterminer les expressions de v_1 en fonction des tensions d'alimentations pour chacun des 3 cas suivants:

- K_1 et K_2 fermés
- K_1 et K_3 fermés
- K_1, K_2 et K_3 fermés.

Par ailleurs, que vaut v_1 lorsque K_1 est ouvert?

2) Pour $\alpha = 45^\circ$, les intervalles de conduction des différents thyristors sont ceux représentés sur la courbe figurant ci-dessous. En appliquant alors les résultats de la question précédente, tracer sur celle-ci l'allure de v_1 .



Problème de synthèse

46 Ce problème aborde quelques aspects de l'utilisation du moteur synchrone autopiloté dans le cadre de la traction ferroviaire. Il comporte cinq parties: les trois premières sont consacrées à l'étude des différents éléments constitutifs (Cf. schéma bloc de la figure 1), la quatrième étudie l'ensemble lors du fonctionnement en traction et la dernière porte sur l'ensemble modifié utilisé en freinage.

I) Etude du pont mixte

Il est constitué comme indiqué sur la figure 2 et débite un courant supposé parfaitement lissé. On désigne par α l'angle de retard à l'amorçage des thyristors et on pose $e = E \sqrt{2} \sin\theta$ en rappelant que E vaut 1800V.

- 1) Pour $\alpha = 60^\circ$ tracer l'allure de u .
- 2) Déterminer l'expression de la valeur moyenne U'_C de u en fonction de E et de α . Application: On note U_C la valeur de U'_C pour $\alpha = 0$. Calculer U_C .
- 3) On se place dans le cas particulier $\alpha = 0$ et $I_C = 1200A$.
 - a) Tracer l'allure de i_s . Calculer sa valeur efficace I_s et le facteur de puissance du redresseur.
 - b) Pour améliorer le facteur de puissance, on place en parallèle sur l'entrée du redresseur un filtre LC accordé de façon à éliminer l'harmonique 3 du courant absorbé. Sachant que l'amplitude de cet harmonique vaut $4I_C/(3\pi)$, calculer les nouvelles valeurs de I_s et du facteur de puissance. N.B.: On utilisera la relation liant la valeur efficace d'un signal à celles de ses harmoniques ($I^2 = \sum I_n^2$) en admettant que ceux d'ordre différent de 3 ne sont pas modifiés par le filtre.

II) Etude du commutateur

Le circuit principal est constitué comme indiqué sur la figure 3. Les thyristors sont amorcés tous les sixièmes de la période T du commutateur suivant la séquence $T_1, T'_3, T_2, T'_1, T_3, T'_2$. Dans un premier temps, on admet que les durées de commutation sont négligeables. Chaque thyristor conduit donc pendant un tiers de période et se bloque soit en commutation naturelle, soit en commutation forcée grâce à un circuit auxiliaire non représenté ici. La charge est supposée constituée par un réseau équilibré de tensions sinusoïdales, de valeur efficace V et de pulsation $\omega = 2\pi/T$.

N.B.: Dans tout ce qui suit, on raisonnera sur l'angle électrique ωt .

- 1) En faisant coïncider l'origine des angles avec le début de conduction de T'_2 , tracer l'allure de i_1 . On note i_f le fondamental de i_1 , de valeur efficace $I = \sqrt{6} I_C/\pi$. Superposer i_f à i_1 .
- 2) Soit φ le déphasage entre i_f et v_1 . Superposer au tracé précédent les tensions v_1 correspondant à $\varphi = 30^\circ$ et $\varphi = -30^\circ$.
- 3) Pour chacune des deux valeurs de φ , reporter les intervalles de conduction des thyristors sur des feuilles comportant les graphes des tensions simples et composées puis tracer les allures de u_1 et de v_{T1} . En déduire le mode de commutation dans chaque cas.
- 4) En écrivant que la puissance fournie par la source de courant est égale à celle absorbée par la charge, déterminer la relation liant la valeur moyenne U'_{1C} de u_1 à V et à φ .
- 5) A partir de maintenant, on s'intéresse plus particulièrement au fonctionnement en commutation naturelle et on pose θ_i la durée angulaire de polarisation en inverse de chaque thyristor à bloquer.
 - a) Compte tenu des résultats obtenus à la question 3), quel doit être le signe de φ ? Vérifier par ailleurs que $\theta_i = |\varphi|$. Application: Sachant que θ_i doit rester supérieur à ωt_q , calculer la valeur minimale en degrés que peut prendre $|\varphi|$ si $\omega = 1250\text{rad/s}$ et $t_q = 150\mu\text{s}$.

b) A courant et fréquence élevés, les durées de commutations ne sont plus négligeables ce qui entraîne une modification de l'allure des courants. Pour simplifier, on linéarise la déformation de i_1 comme indiqué sur la figure 4. Pour $\alpha_C = 30^\circ$ et $\varphi = -30^\circ$, tracer, en les superposant, les allures de i_1 , i_f et v_1 . Vérifier qu'on a maintenant $\theta_i = |\varphi| - \alpha_C/2$. A.N.: Pour $\alpha_C = 30^\circ$, $\omega = 1250 \text{ rad/s}$ et $t_q = 150 \mu\text{s}$, calculer la nouvelle valeur minimale que peut prendre $|\varphi|$.

III) Etude de la machine synchrone

On suppose dans toute cette partie qu'elle est alimentée par une source sinusoïdale de pulsation ω . On note V la tension par phase et I le courant correspondant. Pour l'étude, on fera les hypothèses simplificatrices suivantes:

- Toutes les pertes sont négligées.
- On ne tient compte de l'effet de la saturation que sur le flux à vide; la machine est donc caractérisée par son inductance synchrone $L = 0,4 \text{ mH}$ et par sa tension à vide E_0 , que l'on met sous la forme $E_0 = \Phi_0 \omega$, où Φ_0 ne dépend que du courant inducteur, noté J .

On donne le nombre de paires de pôles $p = 3$ de la machine ainsi que quelques points de sa caractéristique magnétique $\Phi_0 = f(J)$:

J(A)	50	100	150	200	250	300	400	500	600
$\Phi_0(\text{Wb})$	0,231	0,397	0,523	0,616	0,684	0,733	0,793	0,825	0,844

1) Pour un fonctionnement en moteur:

- a) Tracer le schéma équivalent monophasé. En déduire la relation liant \underline{V} , \underline{I} et \underline{E}_0 et la traduire sous forme de diagramme de Fresnel en y faisant apparaître les déphasages φ entre \underline{I} et \underline{V} et ψ entre \underline{I} et \underline{E}_0 .
- b) En prenant \underline{I} comme origine des phases dans la relation liant \underline{V} , \underline{I} et \underline{E}_0 , montrer que $V \cos \varphi = \Phi_0 \omega \cos \psi$ et que $V \sin \varphi = (\Phi_0 \sin \psi + LI) \omega$. En déduire l'expression de $\tan \varphi$ en fonction de Φ_0 , ψ , L et I .
- c) Déterminer l'expression du couple moteur C en fonction de p , Φ_0 , I et ψ , puis celle de la tension V en fonction de Φ_0 , L , I , ψ et ω . Constater qu'à ψ et J constants, C ne dépend que de I et que, si de plus, on maintient C ou I constant, V est proportionnel à ω et l'angle φ reste constant. A.N.: Pour $\psi = -30^\circ$, $J = 500 \text{ A}$ et $I = 936 \text{ A}$, calculer C , le rapport $K = V/\omega$ ainsi que la valeur de φ .
- d) Déterminer l'expression de C en fonction de p , V , I , φ et ω , puis la relation liant V , Φ_0 , L , I , φ et ω . Mettre en évidence dans cette dernière le rapport $K = V/\omega$ et constater qu'à φ et J constants, K ne dépend que de I et qu'il en est donc de même pour C . A.N.: Pour $\varphi = -30^\circ$, $J = 500 \text{ A}$ et $I = 936 \text{ A}$, résoudre l'équation du second degré en K pour obtenir sa nouvelle valeur puis calculer C .

2) Pour un fonctionnement en génératrice:

- a) Tracer le schéma équivalent monophasé. En déduire la relation liant \underline{V} , \underline{I} et \underline{E}_0 et la traduire sous forme de diagramme de Fresnel.
- b) Dans le cas particulier où φ est nul, déterminer la relation liant V , Φ_0 , L , I et ω .

IV) Etude de l'ensemble fonctionnant en traction

Les résultats obtenus au III) restent valables à condition de prendre pour I la valeur efficace correspondant au fondamental de i_1 . On raisonne ici en fonction de la vitesse linéaire v en km/h de l'ensemble, liée à la vitesse de rotation Ω du moteur par $v = 0,719 \Omega$, en se limitant au cas de la traction maximale, pour lequel les courants I_C et J évoluent en fonction de v comme indiqué sur la figure 5.

1) Déduire de la figure 1 que $U'_C = U'_{1C}$ puis substituer à ces termes leurs expressions obtenues dans les questions I)2) et II)4) pour obtenir la relation liant E , α , V et φ . Remplacer ensuite E par sa valeur et vérifier que

cette relation peut se mettre sous la forme $346(1 + \cos\alpha) = V\cos\varphi$. A.N.: Pour $\varphi = -30^\circ$, calculer la valeur maximale que peut prendre V .

2) Entre 0 et 70km/h, l'onduleur de courant fonctionne en commutation forcée et l'évolution se fait à $\psi = -30^\circ$ constant.

a) Calculer la valeur de I .

b) Rappeler les valeurs de C et de $K = V/\omega$. Calculer la tension correspondant à 70km/h ainsi que la valeur de α .

3) Au-delà de 80km/h, l'onduleur de courant fonctionne en commutation naturelle, l'évolution se faisant à $\varphi = -30^\circ$ constant. Le calcul complet montrant que le rapport V/ω évolue peu avec I_C (à cause en particulier du fait que J varie également), nous admettrons pour simplifier que K reste constant et égal à la valeur trouvée dans la question III)1)d).

a) Calculer I et C pour $v = 80\text{km/h}$ et $v = 300\text{km/h}$. Comment évolue C en fonction de la vitesse?

b) Calculer les valeurs correspondantes de V et de α .

4) Entre 70km/h et 80km/h, les angles ψ et φ évoluent avec v pour atteindre les valeurs permettant la transition sans à-coups de couple entre les deux modes de commutation. En admettant que C et V évoluent linéairement dans cette zone, tracer sur une même feuille les courbes $C = f(v)$ et $V = f(v)$ pour $0 \leq v \leq 300\text{km/h}$ (éch.: 1cm = 20km/h 1cm = 500Nm 1cm = 50V).

5) La puissance mécanique maximale de la machine étant égale à 1,1MW, superposer aux courbes précédentes la caractéristique $C = f(v)$ correspondant à cette puissance.

V) Etude de l'ensemble modifié fonctionnant en freinage

Le schéma équivalent correspondant est représenté sur la figure 6. On admet que le courant I_0 débité est parfaitement lissé. Les thyristors du commutateur fonctionnent avec un angle de retard nul (celui-ci se comporte donc comme un redresseur non commandé, d'où le changement de sens de la tension aux bornes, et sa nouvelle notation u'_1). Sauf indication contraire, on néglige l'ondulation de u'_1 , qui est donc considérée comme une tension continue U_0 . On note k le rapport cyclique de l'interrupteur H , supposé limité à $k_{\max} = 0,9$ et on donne $R = 1,5\Omega$.

N.B.: On raisonne en termes de vitesses décroissantes à partir de 300km/h.

1) Tracer l'allure exacte de u'_1 , puis celles de i_1 et de son fondamental i_f . Déterminer l'expression de U_0 en fonction de V . Que vaut le déphasage φ entre i_f et v_1 ?

2) Représenter l'allure de u_{L1} sur une période de fonctionnement du hacheur. Utiliser le fait que la valeur moyenne de cette tension est nulle pour trouver la relation liant U_0 , R , k et I_0 .

3) Entre 300km/h et 150km/h, k est nul et I_0 est constant et égal à 700A. En déduire que U_0 est constant et calculer sa valeur ainsi que celle de V . Ceci étant réalisé par action sur J , déduire de la question III)2)b) l'expression numérique de Φ_0 en fonction de ω , puis de v . En écrivant par ailleurs que la puissance électrique est entièrement transformée en puissance mécanique, déterminer l'expression numérique du couple de freinage C_f en fonction de v . A.N.: Pour les valeurs suivantes de v , 300km/h, 250km/h, 200km/h et 150km/h, calculer C_f , Φ_0 et en déduire J .

4) En dessous de 150km/h, J est maintenu constant et égal à sa valeur pour 150km/h.

a) Dans un premier temps, on maintient I_0 constant par action sur k . Montrer que U_0 est proportionnel à v . En déduire que C_f est constant et donner sa valeur. Calculer le rapport U_0/v , puis, compte tenu du résultat obtenu à la question 2), déterminer l'expression numérique de k en fonction de v . En déduire la vitesse minimale v_{\min} pour laquelle ce régime est possible.

b) En dessous de v_{min} , toutes les grandeurs de réglage sont maintenues constantes, C_f diminue donc en même temps que v . En admettant une variation linéaire du couple dans cette partie, tracer, en la superposant aux courbes précédentes, la caractéristique de freinage $C_f = f(v)$ pour $0 \leq v \leq 300 \text{ km/h}$.

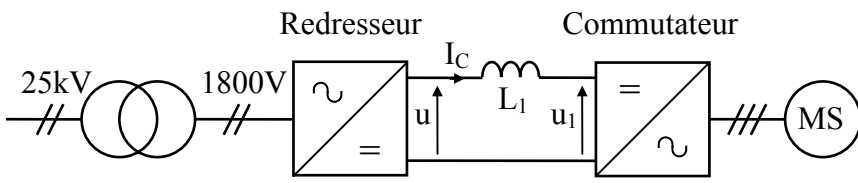


figure 1

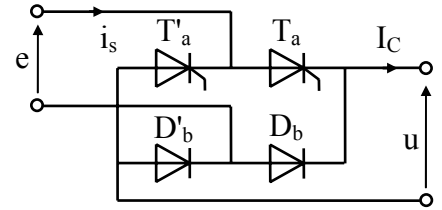


figure 2

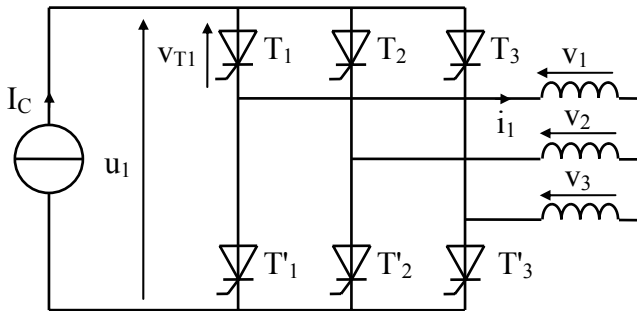


figure 3

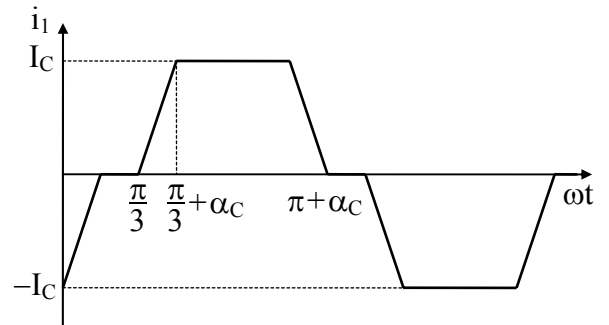


figure 4

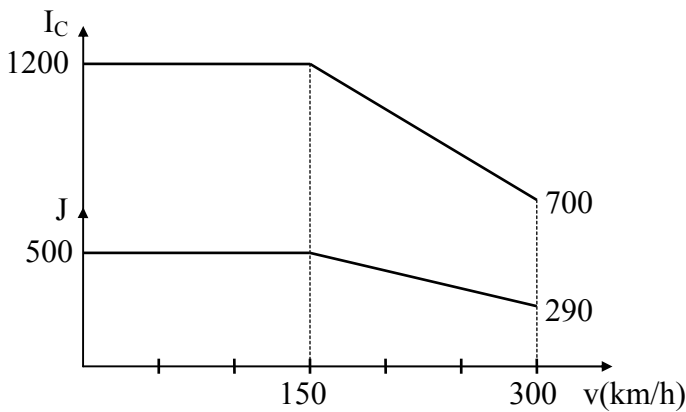


figure 5

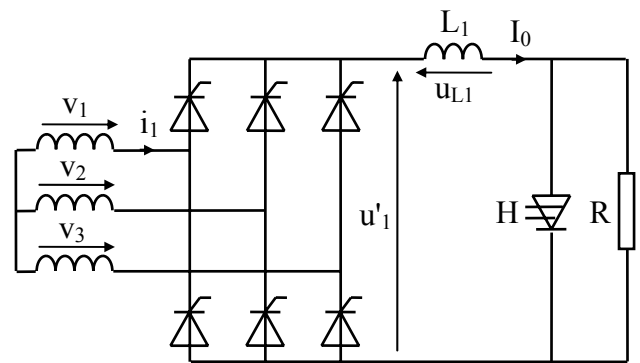


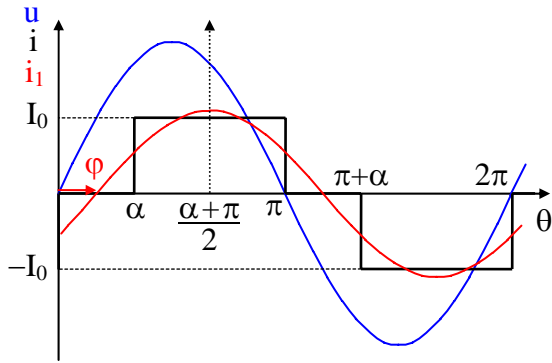
figure 6

NOTE PRELIMINAIRE

Dans tout ce qui suit:

- On suppose que le lecteur dispose des cours correspondants. On se contente donc généralement d'appliquer les résultats. Ceci sera en particulier vrai pour les exercices concernant le redressement, où l'on utilise sans aucune justification les différentes règles de fonctionnement correspondant aux montages étudiés.
- On note les valeurs moyennes à l'aide d'un indice C et les valeurs efficaces sans indice. A titre d'exemple, si $i_1(t)$ est la valeur instantanée, I_{1C} désigne sa valeur moyenne et I_1 sa valeur efficace.
- Les développements mathématiques sont réduits au strict minimum. En particulier, pour les intégrales, on ne donne que l'expression de départ et le résultat final. On procède ainsi car, comme les calculettes disposent de plus en plus d'un module de calcul symbolique, à plus ou moins long terme, on finira par considérer comme parfaitement naturel de leur confier cette partie du travail (de même qu'il ne vient plus à l'idée de personne de demander un calcul à la main d'une multiplication ou d'une division).

1) Allure de i_f – Expression de φ



Si on déplace temporairement l'origine en $(\alpha + \pi)/2$, on constate que la fonction $i(t)$ devient paire. Dans ce cas, son développement en série de Fourier ne contient que des cosinus. C'est en particulier vrai pour le fondamental, qui est, de ce fait, maximum à cette origine. En d'autres termes, le fondamental est centré sur le courant. Son amplitude n'est pas connue pour le moment, mais on peut la prendre arbitrairement du même ordre de grandeur que celle de i . On obtient donc le tracé ci-contre.

Vu ce qui précède, le maximum de i_1 est situé à $(\alpha + \pi)/2$. Son passage par zéro se fait donc à $(\alpha + \pi)/2 - \pi/2$, d'où

$$\boxed{\varphi = \alpha/2}$$

2) Expression de P

Par définition, $P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt$. On fait le changement de variable $\theta = \omega t$, d'où $P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta)i(\theta)d\theta$.

Vu les allures de u et de i , l'intégrale de 0 à π est égale à celle de π à 2π . On a donc

$$P = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\pi} u(\theta)i(\theta)d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U\sqrt{2} \sin\theta I_0 d\theta = \frac{U\sqrt{2}I_0}{\pi} (\cos\alpha - \cos\pi)$$

soit, finalement

$$\boxed{P = \frac{U\sqrt{2}I_0}{\pi} (1 + \cos\alpha)}$$

Expression de I_1

P vaut également $UI_1 \cos\varphi$, d'où, comme $\varphi = \alpha/2$, $UI_1 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{U\sqrt{2}I_0}{\pi} (1 + \cos\alpha)$, soit après simplification,

$$\boxed{I_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

3) Expressions de Q et de S

$$Q = UI_1 \sin\varphi = UI_1 \sin(\alpha/2) \Rightarrow Q = U \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ soit } \boxed{Q = \frac{U\sqrt{2}I_0}{\pi} \sin\alpha}$$

$$S = UI \quad I^2 = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{\alpha}^{\pi} I_0^2 d\theta = \frac{1}{\pi} I_0^2 (\pi - \alpha) \text{ soit } I = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi}} I_0 \text{ d'où } \boxed{S = UI_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi}}}$$

N.B.: A priori, α est en radians. Avec α en degrés, la relation devient $S = UI_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{180}}$

4) Application numérique

$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad f = \frac{P}{S}$. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

$\alpha(^{\circ})$	P(W)	Q(VAR)	S(VA)	D(VA)	f
0	1980	0	2200	958	0,900
90	990	990	1560	677	0,637
150	133	495	898	737	0,148

1) Intervalles de conduction – Allures de u et de v_{D1}

Il s'agit d'un montage de type parallèle, en l'occurrence un P6. Les intervalles de conduction se déduisent de sa règle de fonctionnement. Le tracé de u est immédiat. Par ailleurs, $v_{D1} = e_1 - u$. On peut, soit raisonner de façon entièrement graphique, soit déterminer les expressions de v_{D1} sur les différents intervalles:

$$D_3 \text{ conduit: } u = e_3 \Rightarrow v_{D1} = e_1 - e_3 = e_1 + e_3 = -e_2 = e_2' \quad (\text{rappel: } e_1 + e_2 + e_3 = e_1' + e_2' + e_3' = 0 \text{ car le système de tension est équilibré})$$

$$D_2 \text{ conduit: } u = e_2 \Rightarrow v_{D1} = e_1 - e_2$$

$$D_1 \text{ conduit: } u = e_1 \Rightarrow v_{D1} = e_1 - e_1 = 2e_1$$

$$D_3 \text{ conduit: } u = e_3 \Rightarrow v_{D1} = e_1 - e_3$$

$$D_2 \text{ conduit: } u = e_2 \Rightarrow v_{D1} = e_1 - e_2 = e_1 + e_2 = -e_3 = e_2'$$

Voir page 3 pour les différents tracés.

2) Allures des courants

$i_{s1} = I_C$ si D_1 conduit et $i_{s1} = 0$ sinon (idem pour i'_{s1}).

$$i_{p1} = n[(i_{s1} - I_{s1C}) - (i'_{s1} - I'_{s1C})] \quad I_{s1C} = I'_{s1C} \Rightarrow i_{p1} = n(i_{s1} - i'_{s1})$$

i_{p2} et i_{p3} sont décalés vers la droite respectivement de $2\pi/3$ et de $4\pi/3$

$$i_{L1} = i_{p1} - i_{p2}$$

On constate effectivement que la somme des i_p n'est pas nulle.

3) Expressions des différentes grandeurs

$$U_C = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} E\sqrt{2} \sin \theta d\theta \Rightarrow \boxed{U_C = \frac{3\sqrt{2}E}{\pi}} \quad I_{s1}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} I_C^2 d\theta = \frac{I_C^2}{6} \Rightarrow \boxed{I_{s1} = \frac{I_C}{\sqrt{6}}}$$

$$I_{p1}^2 = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (nI_C)^2 d\theta = \frac{(nI_C)^2}{3} \Rightarrow \boxed{I_{p1} = \frac{nI_C}{\sqrt{3}}} \quad I_{L1}^2 = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (nI_C)^2 d\theta = \frac{2(nI_C)^2}{3} \Rightarrow \boxed{I_{L1} = \frac{n\sqrt{2}I_C}{\sqrt{3}}}$$

Le rapport I_{L1}/I_{p1} vaut $\sqrt{2}$. On ne retrouve donc pas le résultat usuel $\sqrt{3}$. Ceci est dû au fait que la somme des courants par enroulements n'est pas nulle alors que celle des courants en ligne l'est forcément. Une partie des courants (en l'occurrence Σi_p) n'est donc pas transmise en amont ce qui explique que le courant en ligne est proportionnellement moins important. On peut aussi voir ceci sous l'angle des harmoniques: Σi_p est de fréquence 3 fois celle du réseau, donc ne contient que des harmoniques multiples de 3. Or ceux-ci constituent des réseaux homopolaires, qui ne peuvent circuler dans un système trois fils. Ils restent donc confinés dans les enroulements, ce qui diminue d'autant la valeur efficace des courants en ligne.

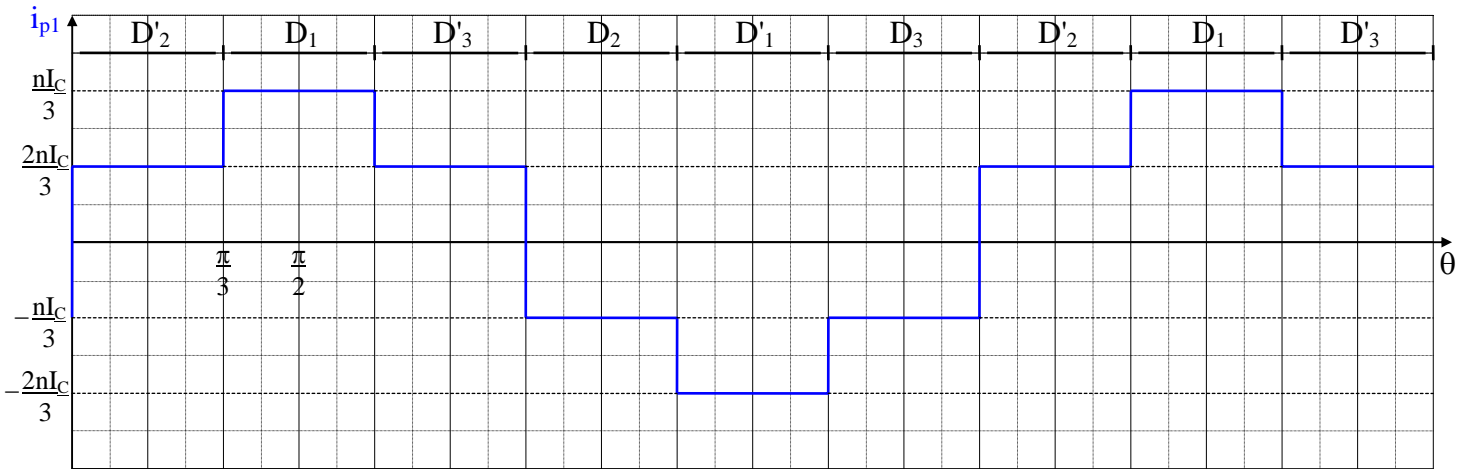
4) Facteurs de puissance

$$f_s = \frac{U_C I_C}{6E I_{s1}} = \frac{3\sqrt{2}E I_C}{6E \frac{I_C}{\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \quad \text{soit } \boxed{f_s = 0,551} \quad f_p = \frac{U_C I_C}{3U_p I_{p1}} = \frac{3\sqrt{2}E I_C}{\sqrt{3} \frac{E n I_C}{n \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \quad \text{soit } \boxed{f_p = 0,780}$$

$$f_L = \frac{U_C I_C}{\sqrt{3} U_p I_{L1}} = \frac{3\sqrt{2}E I_C}{\sqrt{3} \frac{E n \sqrt{2} I_C}{n \sqrt{3}}} = \frac{3}{\pi} \quad \text{soit } \boxed{f_L = 0,955}$$

5)a) Allure de i_{p1}

Pour faciliter le tracé, on peut réécrire la relation sous la forme $i_{p1} = n \left(\frac{2}{3} i_{s1} + \frac{i'_{s2}}{3} + \frac{i'_{s3}}{3} - \frac{2}{3} i'_{s1} - \frac{i_{s2}}{3} - \frac{i_{s3}}{3} \right)$ et remarquer que seul un des 6 courants est non nul à la fois et vaut I_C lorsque la diode correspondante conduit.



Expression de I_{p1}

$$I_{p1}^2 = \frac{1}{2\pi} 4 \int_0^{\pi} i_{p1}^2 d\theta = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{nI_C}{3} \right)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2nI_C}{3} \right)^2 d\theta \right) = 2 \left(\frac{nI_C}{3} \right)^2 \Rightarrow \boxed{I_{p1} = \frac{n\sqrt{2}I_C}{3}}$$

b) Calcul de f_p

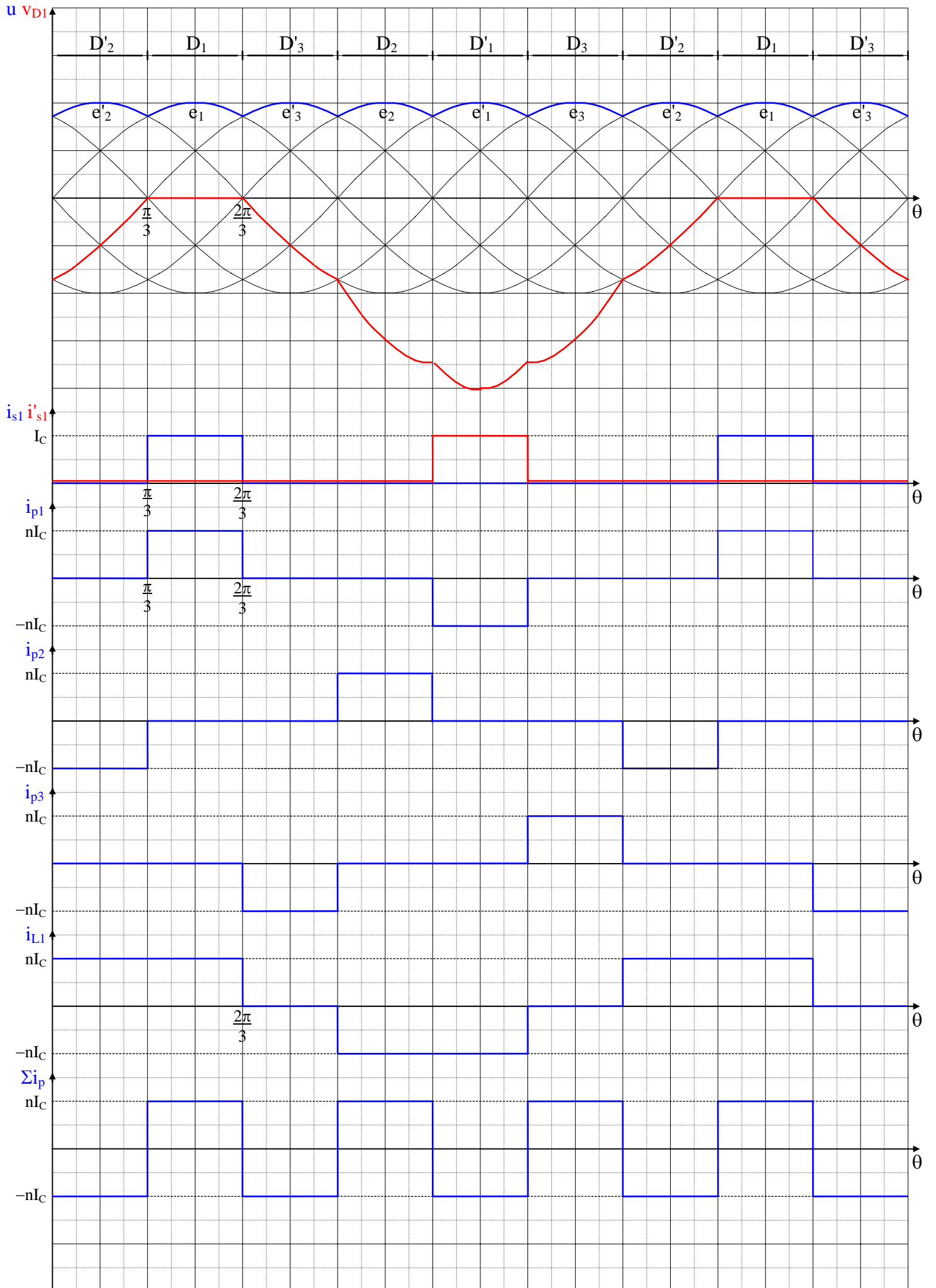
Comme le primaire est couplé en étoile, la tension aux bornes d'un enroulement n'est plus égale à U_p . Elle vaut

cependant toujours E/n . D'où $f_p = \frac{U_C I_C}{3 \frac{E}{n} I_{p1}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}E}{\pi} I_C}{3 \frac{E}{n} \frac{n\sqrt{2}I_C}{3}} = \frac{3}{\pi}$ soit $\boxed{f_p = 0,955}$

Le facteur de puissance au primaire du transformateur est donc nettement amélioré. Par contre, les ampères-tours ne sont plus compensés sur chaque colonne (phénomène analogue à celui qui se produit dans un fonctionnement en déséquilibre et qui explique l'expression particulière de i_{p1}). Pour que la d.d.p. magnétique qui en résulte soit sans effets notables, il faut que le circuit magnétique du transformateur soit de type à 3 colonnes seulement.

6) Calcul de n

$U_C = \frac{3\sqrt{2}E}{\pi}$ Vu le couplage en triangle, $E = nU_p$ d'où $U_C = \frac{3\sqrt{2}nU_p}{\pi}$ donc $n = \frac{\pi U_C}{3\sqrt{2}U_p} = \frac{\pi 250}{3\sqrt{3} 380}$
soit $\boxed{n = 0,487}$



I1) Intervalles de conduction et allures voir page 3 pour tous les tracés correspondants à cette partie.

2) Expression de U_{1C}

Vu la symétrie par rapport à l'origine, on choisit l'intervalle d'intégration $[-\pi/6; \pi/6]$. Sur celui-ci, u_1 vaut $e_3 - e_2$, mais on peut aussi remarquer que c'est une tension composée maximale à l'origine. On a donc $u = nV \sqrt{6} \cos \theta$

$$\text{d'où } U_{1C} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} nV \sqrt{6} \cos \theta d\theta \Rightarrow \boxed{U_{1C} = \frac{3\sqrt{6}nV}{\pi}}$$

Application numérique

$$U_{1C} = \frac{3\sqrt{6}nV}{\pi} \Rightarrow n = \frac{\pi U_{1C}}{3\sqrt{6}V} = \frac{\pi 500}{3\sqrt{6} 220} \text{ soit } \boxed{n = 0,972}$$

$$\text{Cf. tracé de } v_D, v_{D\max} = nV \sqrt{6} = 0,972 \cdot 220 \sqrt{6} \Rightarrow \boxed{v_{D\max} = 524V}$$

3) Allure de i_{s1}

$i_{s1} = I_C = 150A$ quand D_{11} conduit et $i_{s1} = -I_C = -150A$ quand D'_{11} conduit.

Calcul de I_{s1} et de f_{s1}

$$I_{s1}^2 = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 150^2 d\theta = \frac{2}{3} 150^2 \Rightarrow \boxed{I_{s1} = 122A}$$

$$f_{s1} = \frac{P}{S_{s1}} = \frac{U_{1C} I_C}{3nV I_{s1}} = \frac{500 \cdot 150}{3 \cdot 0,972 \cdot 220 \cdot 122} \Rightarrow \boxed{f_{s1} = 0,958}$$

N.B.: La différence avec le résultat théorique 0,955 provient des arrondis.

I1) Intervalles de conduction et allures voir page 4 pour tous les tracés correspondants à cette partie.

2) Expression de U_{2C}

On choisit ici l'intervalle d'intégration $[\pi/3; 2\pi/3]$ où u_2 vaut e_1 , soit $n'V \sqrt{2} \sin \theta$, d'où

$$U_{2C} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} n'V \sqrt{2} \sin \theta d\theta \text{ soit } \boxed{U_{2C} = \frac{3\sqrt{2}n'V}{\pi}}$$

Application numérique

$$U_{2C} = \frac{3\sqrt{2}n'V}{\pi} \Rightarrow n' = \frac{\pi U_{2C}}{3\sqrt{2}V} = \frac{\pi 500}{3\sqrt{2} 220} \text{ soit } \boxed{n' = 1,68}$$

$$\text{Cf. tracé de } v_D, v_{D\max} = n'V \sqrt{2} = 1,68 \cdot 220 \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{v_{D\max} = 523V}$$

N.B.: En réalité, la tension inverse maximale pour chacun des deux ponts est la même. Là encore, la différence provient des arrondis.

3) Expression de i'_{s1} – Allures des courants

L'utilisation uniquement des lois aux trois nœuds ne convient pas car elle mène à un système indéterminé. On emploie donc la relation supplémentaire $i'_{s1} + i'_{s2} + i'_{s3} = 0$ à la place d'une des trois précédentes (on élimine celle

qui ne contient pas le courant à chercher i'_{s1}). Ceci conduit à
$$\begin{cases} i'_{s1} + i'_{s2} + i'_{s3} = 0 \\ i'_{s1} = i_1 + i'_{s2} \\ i'_{s3} = i_3 + i'_{s1} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} i'_{s1} + i'_{s2} + i'_{s3} = 0 \\ i'_{s2} = i'_{s1} - i_1 \\ i'_{s3} = i_3 + i'_{s1} \end{cases} \quad \text{dont on}$$

tire $i'_{s1} + (i'_{s1} - i_1) + (i'_{s1} + i_3) = 0$ soit
$$i'_{s1} = \frac{i_1 - i_3}{3}$$

Le tracé de i_1 est analogue à celui de i_{s1} pour le pont PD3, celui de i_3 s'en déduit par un décalage à droite de $4\pi/3$, celui de i'_{s1} s'obtient ensuite en appliquant la relation précédente.

Calcul de I'_{s1} et de f_{s1}

$$I'_{s1}{}^2 = \frac{1}{2\pi} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} i'_{s1}{}^2 d\theta = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} 50^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 100^2 d\theta \right) = 5000 \Rightarrow I'_{s1} = 70,7A$$

$$f_{s1} = \frac{P}{S_{s2}} = \frac{U_{2C} I_C}{3n' VI_{s2}} = \frac{500 \cdot 150}{3 \cdot 1,68 \cdot 220 \cdot 70,7} \Rightarrow f_{s1} = 0,957$$

N.B.: On retrouve toujours le problème des arrondis.

III)1) Allure de u voir page 3 pour les tracés correspondants à cette partie

Il suffit de faire la somme des allures obtenues pour u_1 et u_2 . On peut constater que, comme ces deux tensions sont identiques au décalage de 30° près, leur somme présente une ondulation résiduelle de fréquence 12 fois celle du réseau d'alimentation (et d'amplitude beaucoup plus faible que celle de u_1 et de u_2).

Valeur de U_C

$$u = u_1 + u_2 \Rightarrow U_C = U_{1C} + U_{2C} = 500 + 500 \quad \text{soit} \quad U_C = 1000V$$

2) Allure de i_{L1}

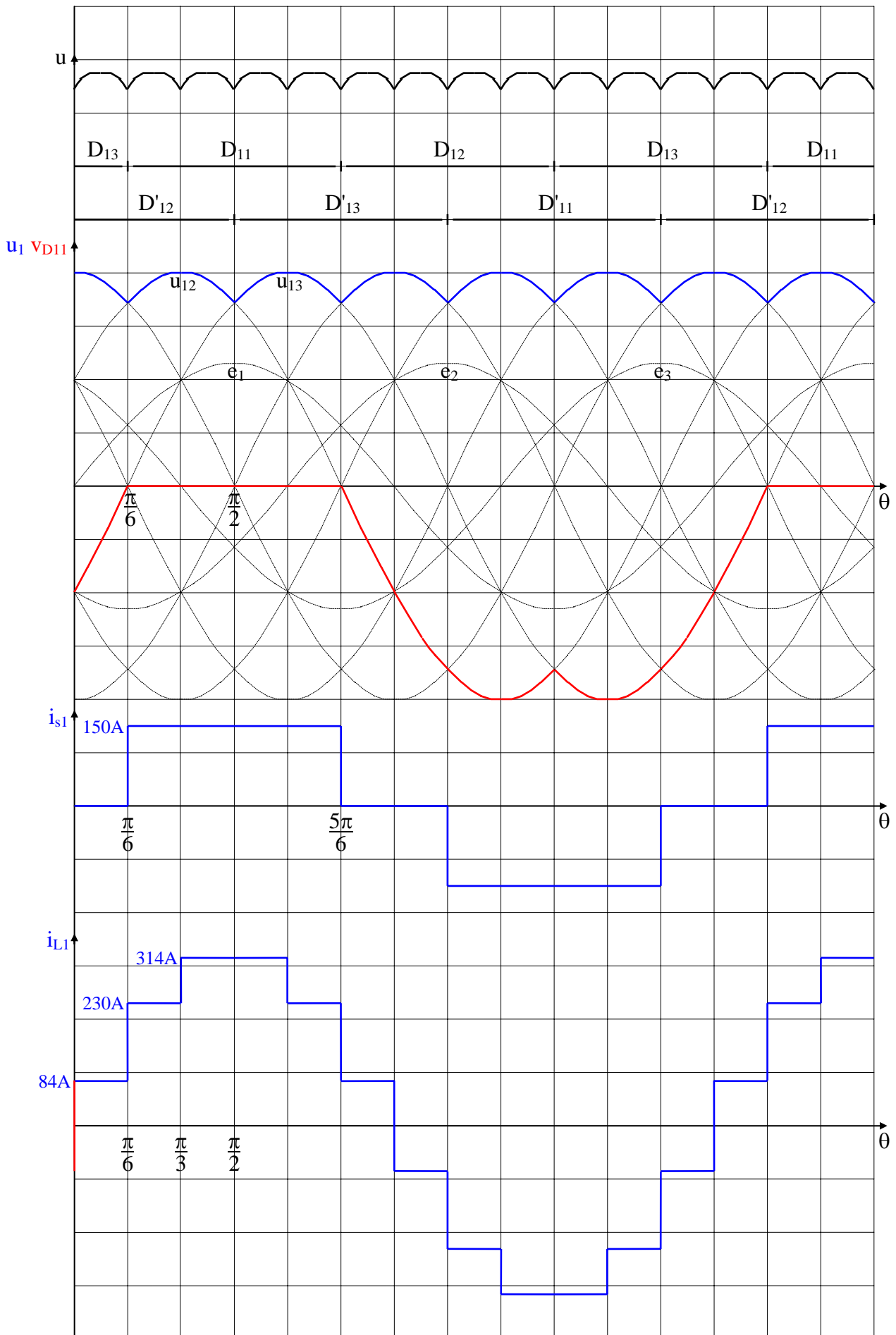
$i_{L1} = n i_{s1} + n' i'_{s1} = 0,972 i_{s1} + 1,68 i'_{s1}$. Vu les allures de i_{s1} et i'_{s1} , on peut se contenter du tracé de i_{L1} sur $[0; \pi/2]$ et compléter ensuite en utilisant les différentes symétries.

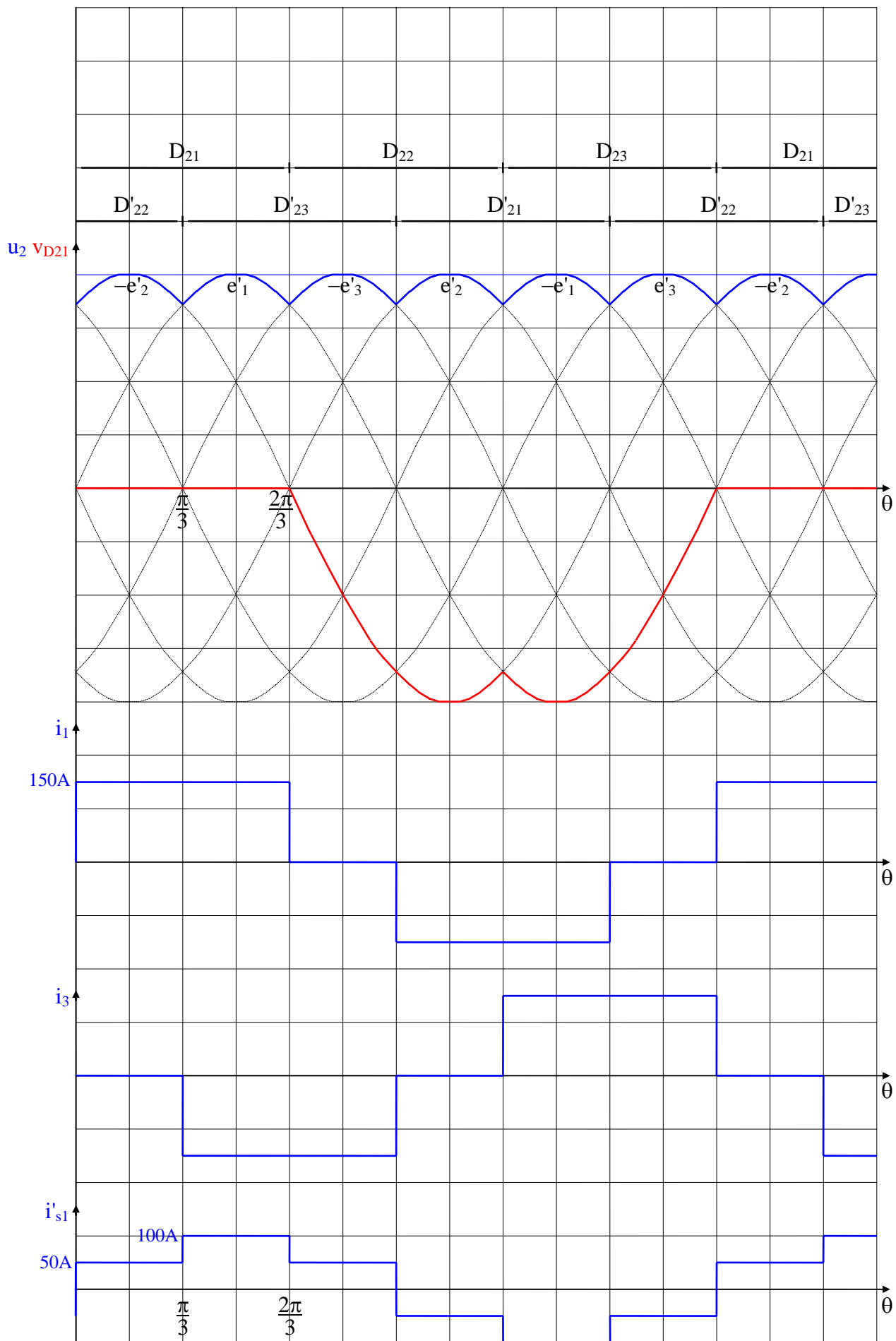
$$\begin{cases} \theta \in \left[0; \frac{\pi}{6} \right]: & i_{s1} = 0 \quad i'_{s1} = 50A \Rightarrow i_{L1} = 84A \\ \theta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]: & i_{s1} = 150A \quad i'_{s1} = 50A \Rightarrow i_{L1} = 230A \\ \theta \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right]: & i_{s1} = 150A \quad i'_{s1} = 100A \Rightarrow i_{L1} = 314A \end{cases}$$

Calcul de I_{L1} et de f_p

$$I_{L1}{}^2 = \frac{1}{2\pi} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} i_{L1}{}^2 d\theta = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} 84^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 230^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 314^2 d\theta \right) = 52850 \Rightarrow I_{L1} = 230A$$

$$f_p = \frac{P}{S_p} = \frac{U_C I_C}{3 VI_{L1}} = \frac{1000 \cdot 150}{3 \cdot 220 \cdot 230} \Rightarrow f_p = 0,988$$





1) Allure de u voir page 3 pour les différents tracés

Calcul de U_C

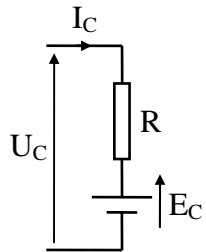
$$U_C = \frac{1}{\frac{2\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} E\sqrt{2} \sin \theta d\theta} = \frac{3\sqrt{6}E}{2\pi} \quad E = 220V \Rightarrow U_C = \frac{3\sqrt{6} \cdot 220}{2\pi} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_C = 257,3V}$$

2) L'approximation du premier harmonique consiste à ne conserver de la grandeur d'entrée que sa valeur moyenne et le premier terme sinusoïdal de son développement en série de Fourier. La charge étant linéaire, le théorème de superposition s'applique, ce qui permet d'étudier séparément la réponse à chacun des deux termes, puis d'effectuer leur somme pour obtenir une valeur approchée de la grandeur de sortie. Le résultat sera d'autant plus proche de la réalité que:

- les harmoniques de la grandeur d'entrée décroissent rapidement avec leur fréquence
- l'impédance de la charge augmente avec cette fréquence.

Ces conditions sont généralement bien vérifiées dans les associations usuelles redresseurs + charge.

a) Calcul de I_C

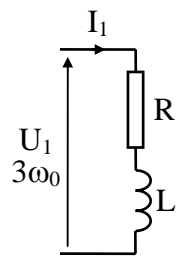


Les valeurs moyennes étant équivalentes à des grandeurs électriques continues, le schéma équivalent vis à vis de celles-ci est celui représenté ci-contre (L se comporte comme un court-circuit). On en déduit immédiatement

$$I_C = \frac{U_C - E_C}{R} = \frac{257,3 - 240}{1} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_C = 17,3A}$$

b) Expression de I_1

Vis à vis de la composante alternative, il ne subsiste que R et L, Cf. schéma ci-contre où on a précisé la pulsation de la tension d'entrée. On peut noter que cette dernière est forcément un multiple de celle du réseau d'alimentation, le coefficient multiplicateur se déduisant, soit directement de la décomposition en série de Fourier de u, soit graphiquement de son allure. Dans ce dernier cas, il est égal à l'« indice de pulsation » p, correspondant au nombre d'ondulations de u par période du réseau (ou au rapport entre la période du réseau et celle de l'ondulation résiduelle de u, en l'occurrence T/3 ici).



Compte tenu de ceci et de l'expression de U_1 , il vient immédiatement

$$\boxed{I_1 = \frac{U_C / 4\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + (3L\omega_0)^2}}}$$

Calcul de I_1 et de L

Le facteur de forme F de i est égal à I/I_C . Vu qu'on se limite au premier harmonique, $I = \sqrt{I_C^2 + I_1^2}$, d'où

$$F = \frac{\sqrt{I_C^2 + I_1^2}}{I_C}, \quad \text{dont on déduit} \quad I_1 = \sqrt{F^2 - 1} I_C = \sqrt{1,1^2 - 1} \cdot 17,3 \quad \text{soit} \quad \boxed{I_1 = 7,9A}$$

$$\text{De l'expression de } I_1, \text{ on déduit} \quad R^2 + (3L\omega_0)^2 = \left(\frac{U_C / 4\sqrt{2}}{I_1} \right)^2 \quad \text{soit} \quad L = \frac{1}{3\omega_0} \sqrt{\left(\frac{U_C / 4\sqrt{2}}{I_1} \right)^2 - R^2}.$$

$$\text{Numériquement, on a donc} \quad L = \frac{1}{3 \cdot 100\pi} \sqrt{\left(\frac{257,3}{4\sqrt{2} \cdot 7,9} \right)^2 - 1^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{L = 6,02mH}$$

c) Allures des différents courants

$$i = I_C - I_1 \sqrt{2} \sin(3\theta - \varphi_1) = 17,3 - 7,9 \sqrt{2} \sin(3\theta - \pi/2) = 17,3 + 11,2 \cos(3\theta)$$

$i_{s1} = i$ quand D_1 conduit et 0 sinon.

$i_{p1} = n(i_{s1} - I_{s1C})$ avec $n = 1$. Quelle que soit la forme réelle de i , on montre que I_{s1C} est égal à $I_C/3$. On a donc

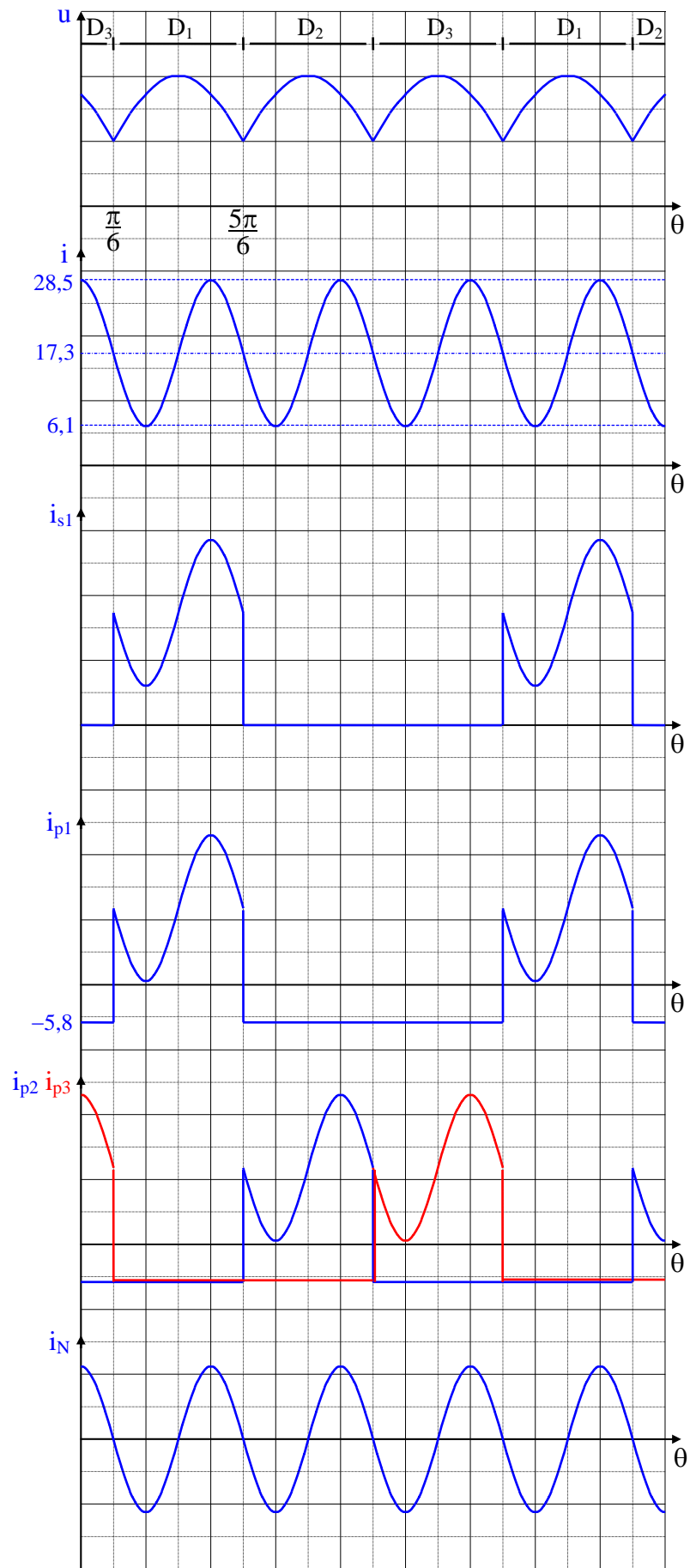
$$i_{p1} = 17,3 + 11,2 \cos(3\theta) - 17,3/3 = 11,5 + 11,2 \cos(3\theta) \text{ quand } D_1 \text{ conduit}$$

$$i_{p1} = -17,3/3 = -5,8 \text{ quand } D_1 \text{ est bloquée.}$$

i_{p2} et i_{p3} se déduisent de i_{p1} par des décalages à droite, respectivement de $2\pi/3$ et de $4\pi/3$.

$$i_N = i_{p1} + i_{p2} + i_{p3} = n(i_{s1} - I_{s1C}) + n(i_{s2} - I_{s2C}) + n(i_{s3} - I_{s3C}) = i_{s1} + i_{s2} + i_{s3} - I_{s1C} - I_{s2C} - I_{s3C} \text{ (rappel: } n = 1 \text{)}.$$

Or $i_{s1} + i_{s2} + i_{s3} = i$ et $I_{s1C} = I_{s2C} = I_{s3C} = I_C/3$. On a donc simplement $i_N = i - I_C$. En d'autres termes, dans le neutre circule l'ondulation résiduelle de i .



1) Relations entre les grandeurs

Vu le sens des courants, on a $e_1 = L \frac{di_1}{dt} + v_1$. On effectue alors le changement de variable $\theta = \omega_0 t$, qui conduit

en particulier à $\frac{di_1}{dt} = \omega_0 \frac{di_1}{d\theta}$, d'où $e_1 = L\omega_0 \frac{di_1}{d\theta} + v_1$ De même $e_2 = L\omega_0 \frac{di_2}{d\theta} + v_2$

2) Expression de u

Avec $v_1 = v_2 = u$, les relations précédentes deviennent $\begin{cases} e_1 = L\omega_0 \frac{di_1}{d\theta} + u \\ e_2 = L\omega_0 \frac{di_2}{d\theta} + u \end{cases}$. On en fait alors la somme, pour faire

apparaître $i_1 + i_2$: $e_1 + e_2 = L\omega_0 \left(\frac{di_1}{d\theta} + \frac{di_2}{d\theta} \right) + 2u = L\omega_0 \frac{d(i_1 + i_2)}{d\theta} + 2u$. Comme $i_1 + i_2 = I_C$ constant, sa dérivée est nulle. D'autre part, ici, $e_1 = -e_2$. Il vient donc finalement $u = 0$

Expression de i_1

Comme $u = 0$, on a $e_1 = L\omega_0 \frac{di_1}{d\theta}$ avec $e_1 = E\sqrt{2} \sin\theta$. On en déduit $\frac{di_1}{d\theta} = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega_0} \sin\theta$, soit $i_1 = -\frac{E\sqrt{2}}{L\omega_0} \cos\theta + A$.

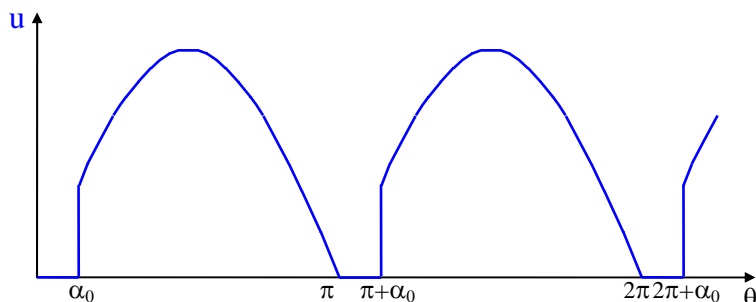
La constante d'intégration A se détermine en remarquant que $i_1(0) = 0$ (continuité du courant dans une inductance, sa valeur avant l'amorçage de la diode D_1 étant nulle), d'où $A = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega_0}$ et $i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega_0} (1 - \cos\theta)$

Expression de α_0

L'empiètement cesse lorsque la diode D_2 se bloque, donc quand i_2 s'annule. Comme $i_2 = I_C - i_1$, ceci correspond à $i_1 = I_C$. L'angle α_0 est donc défini par $I_C = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega_0} (1 - \cos\alpha_0)$, soit $\alpha_0 = \arccos\left(1 - \frac{L\omega_0 I_C}{E\sqrt{2}}\right)$

A.N.: $\alpha_0 = \arccos\left(1 - \frac{0,8 \cdot 10}{60\sqrt{2}}\right)$ soit $\alpha_0 = 25,1$

3) Allure de u – Expression de U_C



$u = 0$ pendant l'empiètement et $+e$ ou $-e$ sinon, d'où l'allure représentée ci-contre.

$U_C = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\pi} E\sqrt{2} \sin\theta d\theta = \frac{E\sqrt{2}}{\pi} [\cos\alpha_0 - \cos\pi]$ soit

$U_C = \frac{E\sqrt{2}}{\pi} (1 + \cos\alpha_0)$

4) Expression de ΔU_C – Application numérique

$\Delta U_C = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi} - \frac{E\sqrt{2}}{\pi} (1 + \cos\alpha_0) = \frac{E\sqrt{2}}{\pi} (1 - \cos\alpha_0)$. Or, Cf. 2), $1 - \cos\alpha_0 = \frac{L\omega_0 I_C}{E\sqrt{2}}$. Il s'ensuit que

$\Delta U_C = \frac{L\omega_0 I_C}{\pi}$

$\Delta U_C = \frac{0,8 \cdot 10}{\pi}$ soit $\Delta U_C = 2,55V$ $U_{C0} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 60}{\pi}$ soit $U_{C0} = 54V$ D'où $\frac{\Delta U_C}{U_{C0}} = 4,7\%$

1) Calcul de m , R_s , X_s et L_s

$$m = \frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{400}{380} \quad \text{soit} \quad \boxed{m = 1,05} \quad R_s = \frac{P_{Ic}}{3I_{2c}^2} = \frac{515}{3 \cdot 20^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_s = 0,429\Omega}$$

$$X_s = R_s \tan(\varphi_c) \quad \varphi_c = \arccos\left(\frac{P_{Ic}}{\sqrt{3}U_{1c}mI_{2c}}\right) = \arccos\left(\frac{515}{\sqrt{3} \cdot 20 \cdot 1,05 \cdot 20}\right) = 44,9^\circ \Rightarrow \boxed{X_s = 0,428\Omega}$$

$$L_s = X_s/\omega = 0,428/100\pi \quad \text{soit} \quad \boxed{L_s = 1,36\text{mH}}$$

2) Allure de u_0 – Calcul de U_{C0}

Compte tenu des hypothèses faites, le schéma équivalent est celui représenté sur la figure 1. On note comme habituellement les tensions simples sous la forme $e_1 = E\sqrt{2}\sin\theta$, $e_2 = E\sqrt{2}\sin(\theta - 2\pi/3)$ et $e_3 = E\sqrt{2}\sin(\theta - 4\pi/3)$ avec E , ici, égal à $U_{20}/\sqrt{3}$. L'allure de u_0 est représentée sur la figure 2.

$$U_{C0} = \frac{1}{2\pi/3} \int_{\pi/6}^{\pi/6+2\pi/3} \frac{U_{20}}{\sqrt{3}} \sqrt{2} \sin\theta d\theta = \frac{3U_{20}}{\sqrt{2}\pi} = \frac{3 \cdot 400}{\sqrt{2}\pi} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_{C0} = 270\text{V}}$$

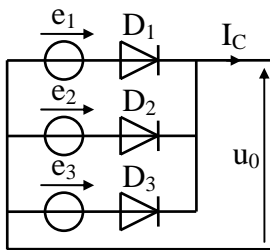


figure 1

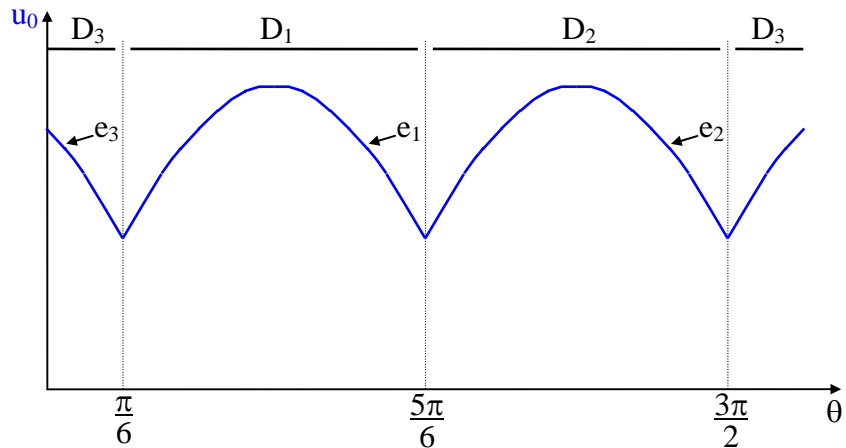


figure 2

3) Expression de u – Allure de u

Si on tient compte des résistances, le schéma se modifie comme indiqué sur la figure 3. Lorsque D_1 conduit, on a maintenant $u = e_1 - R_s I_c$. De même, $u = e_2 - R_s I_c$ lorsque D_2 conduit et $u = e_3 - R_s I_c$ lorsque D_3 conduit. Comme e_1 , e_2 et e_3 sont les valeurs correspondantes à vide, il vient donc simplement $\boxed{u = u_0 - R_s I_c}$

L'allure de u est représentée sur la figure 4.

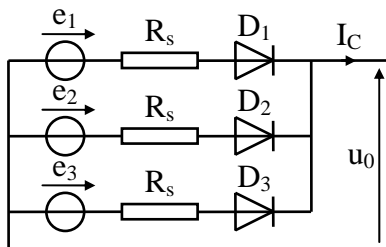


figure 3

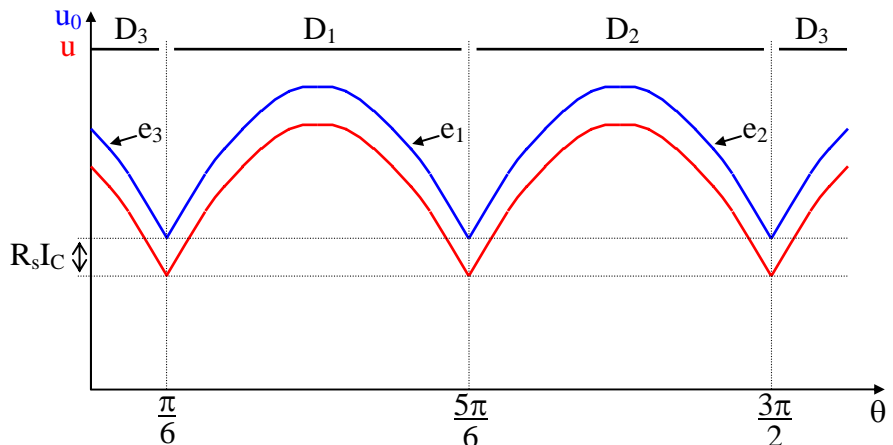


figure 4

Calcul de $\Delta_1 U_C$

$\Delta_1 U_C = U_C - U_{C0}$. Or $u = u_0 - R_s I_C \Rightarrow U_C = U_{C0} - R_s I_C$ (car $R_s I_C$ est constant), d'où $\Delta_1 U_C = R_s I_C$

A.N.: $\Delta_1 U_C = 0,429 \cdot 30$ soit $\Delta_1 U_C = 12,9V$

4)a) Expression de $i_1(\theta)$

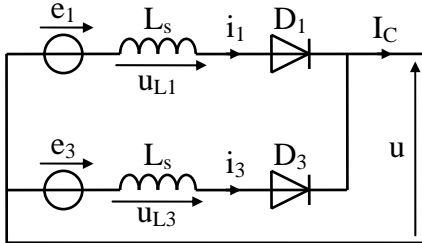


figure 5

En ne tenant compte que des éléments passants, le schéma se ramène à celui représenté ci-contre. On en déduit en particulier

$$u = e_1 + u_{L1} = e_1 - L \frac{di_1}{dt} = e_1 - L\omega_0 \frac{di_1}{d\theta}$$

soit, en remplaçant $L\omega_0$ par X_s , $u = e_1 - X_s \frac{di_1}{d\theta}$.

De même, $u = e_3 + u_{L3} \Rightarrow u = e_3 - X_s \frac{di_3}{d\theta}$

Comme $i_1 + i_3 = I_C$, terme constant dont la dérivée est nulle, on additionne alors les deux relations pour faire apparaître cette somme, soit $2u = e_1 + e_3 - X_s \left(\frac{di_1}{d\theta} + \frac{di_3}{d\theta} \right) = e_1 + e_3 - X_s \frac{d(i_1 + i_3)}{d\theta}$ d'où $u = \frac{e_1 + e_3}{2}$.

Ceci, reporté dans la première relation donne $\frac{e_1 + e_3}{2} = e_1 - X_s \frac{di_1}{d\theta}$, soit $\frac{di_1}{d\theta} = \frac{e_1 - e_3}{2X_s}$.

La différence $e_1 - e_3$ est une tension composée. Avec la nouvelle origine (Cf. figure 6), elle s'écrit sous la forme $U_{20}\sqrt{2} \sin\theta$, ce qui conduit à $\frac{di_1}{d\theta} = \frac{U_{20}\sqrt{2} \sin\theta}{2X_s}$. On en déduit $i_1 = -\frac{U_{20} \cos\theta}{\sqrt{2}X_s} + A$. La valeur de A

s'obtient à partir de la condition initiale $i_1(0) = 0$. Il vient $A = \frac{U_{20}}{\sqrt{2}X_s}$, d'où, finalement $i_1 = \frac{U_{20}}{\sqrt{2}X_s} (1 - \cos\theta)$

Valeur de α_0

L'empiètement s'arrête lorsque $i_3 = 0$, donc lorsque $i_1 = I_C$. Cette condition, reportée dans l'expression de i_1 ,

donne $I_C = \frac{U_{20}}{\sqrt{2}X_s} (1 - \cos\alpha_0)$, soit $\alpha_0 = \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}X_s I_C}{U_{20}}\right)$

A.N.: $\alpha_0 = \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2} \cdot 0,428 \cdot 30}{400}\right)$ soit $\alpha_0 = 17,3^\circ$

b) Allure de u – Expression de $\Delta_2 U_C$

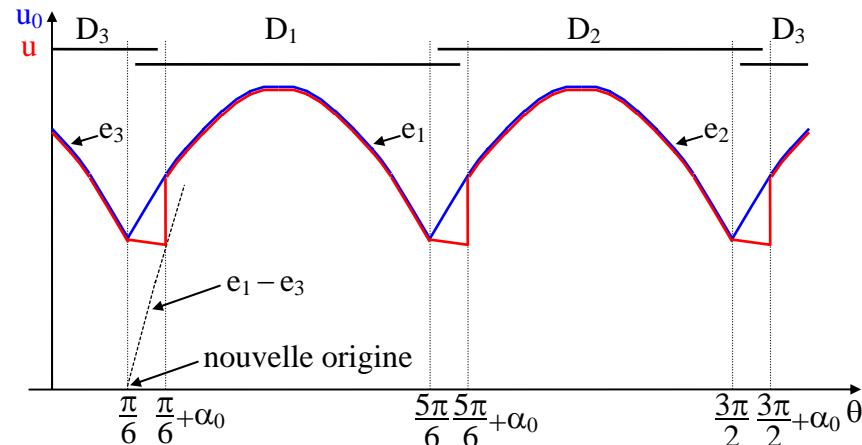


figure 6

Pendant l'empiètement, $u = (e_i + e_j)/2$ où i et j sont les indices des diodes qui commutent. En dehors de l'intervalle correspondant, u est égal à u_0 . Ceci conduit donc à l'allure représentée ci-contre.

Pour déterminer l'expression de $\Delta_2 U_C$, on reprend l'origine initiale de façon à se rapprocher du calcul fait au 2). On a

donc $\Delta_2 U_C = \frac{1}{2\pi/3} \int_{\pi/6}^{\pi/6 + \alpha_0} (u_0 - u) d\theta$.

Or, $u_0 - u$ n'est non nul que pendant l'empiétement et vaut alors $e_1 - \frac{e_1 + e_3}{2}$, soit $\frac{e_1 - e_3}{2}$. D'autre part, Cf. 4)a),

$$\frac{e_1 - e_3}{2} = X_s \frac{di_1}{d\theta}. \text{ On a donc } \Delta_2 U_C = \frac{1}{2\pi/3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6} + \alpha_0} X_s \frac{di_1}{d\theta} d\theta = \frac{X_s}{2\pi/3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6} + \alpha_0} di_1 = \frac{3X_s}{2\pi} \left(i_1 \left(\frac{\pi}{6} + \alpha_0 \right) - i_1 \left(\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Comme $i_1 \left(\frac{\pi}{6} + \alpha_0 \right) = I_C$ et $i_1 \left(\frac{\pi}{6} \right) = 0$, il vient finalement $\Delta_2 U_C = \frac{3X_s I_C}{2\pi}$

A.N.: $\Delta_2 U_C = \frac{3 \cdot 0,428 \cdot 30}{2\pi}$ soit $\Delta_2 U_C = 6,13V$

Remarque: Bien sûr, on peut également conserver la nouvelle origine. Vu la démarche utilisée, les tensions n'interviennent pas explicitement dans les calculs, on n'a donc pas à réécrire leurs expressions. Par contre, il faut évidemment retrancher $\pi/6$ à toutes les bornes comme indiqué ci-dessous

$$\Delta_2 U_C = \frac{1}{2\pi/3} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (u - u_0) d\theta = \frac{1}{2\pi/3} \int_0^{\alpha_0} X_s \frac{di_1}{d\theta} d\theta = \frac{X_s}{2\pi/3} \int_0^{\alpha_0} di_1 = \frac{3X_s}{2\pi} (i_1(\alpha_0) - i_1(0)) = \frac{3X_s I_C}{2\pi}$$

1)a) Expressions de u et de C

Dans tous les cas, on a $i = I + C \frac{du}{dt}$. Ici, comme le pont redresseur est bloqué, $i = 0$, on a donc $C \frac{du}{dt} = -I$.

On en déduit $u = -\frac{I}{C}t + A$. La constante d'intégration A s'obtient à partir de la condition initiale:

$$u(0) = E\sqrt{2} \text{ entraîne } A = E\sqrt{2}, \text{ d'où } \boxed{u = E\sqrt{2} - \frac{I}{C}t}$$

$$u(t_1) = U_1 \Rightarrow U_1 = E\sqrt{2} - \frac{I}{C}t_1 \text{ soit } \boxed{C = \frac{It_1}{E\sqrt{2} - U_1}}$$

b) Expression de t_1 – Autre expression de C

$$U_1 = -e(t_1) = E\sqrt{2} \cos(\omega_0 t_1) \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(-\frac{U_1}{E\sqrt{2}}\right)}$$

On reporte alors cette expression dans la relation donnant C, ce qui entraîne, compte tenu de $\omega_0 = 2\pi/T$,

$$\boxed{C = \frac{IT \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{-U_1}{E\sqrt{2}}\right)}{E\sqrt{2} - U_1}}$$

N.B.1: Si l'arc cosinus est exprimé en degrés, il faut remplacer 2π par 360° .

N.B.2: Lorsque, comme c'est souvent le cas, on place l'origine des temps au passage par zéro de $e(t)$, on obtient

$$C = \frac{IT \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{U_1}{E\sqrt{2}}\right) \right)}{E\sqrt{2} - U_1}. \text{ Cette expression est évidemment la même que la précédente, il suffit, pour le}$$

voir, d'utiliser le fait que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$, qui entraîne $\frac{1}{2\pi} \arccos(x) = \frac{\pi/2}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \arcsin(x)$, soit, en

$$\text{remplaçant } x \text{ par } -U_1/E\sqrt{2}, \quad \frac{1}{2\pi} \arccos\left(-\frac{U_1}{E\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{U_1}{E\sqrt{2}}\right)$$

c) Expression approchée de C

$$\text{Vu les hypothèses faites, il vient immédiatement } \boxed{C = \frac{IT}{E\sqrt{2} - U_1}}$$

d) Valeurs de C

E(V)	12	15	18
C(μF)	2720	1010	598
C approché(μF)	3370	1390	873

Dans cette gamme de condensateurs, les valeurs normalisées sont 1 – 1,5 – 2,2 – 3,3 – 4,7 – 6,8 et les tolérances sont, suivant les constructeurs, de $\pm 20\%$ ou de -10% à 50% . Pour garder une marge de sécurité, on prend d'office la valeur normalisée par excès, ce qui conduit généralement à celle obtenue par la formule simplifiée. Eventuellement, si celle-ci donne des valeurs très élevées de capacité, on peut toujours voir ce que cela donne avec la formule plus exacte.

2) Expression de i

Tant que le pont conduit, $u = -e = -E\sqrt{2} \cos(\omega_0 t)$. Cf. 1)a), il vient immédiatement $i = I + C\omega_0 E\sqrt{2} \sin \omega_0 t$

Application numérique

$$t_1 = \frac{C(E\sqrt{2} - U_1)}{I} = 10^{-3}(15\sqrt{2} - 14) \quad \text{soit} \quad t_1 = 7,21\text{ms}$$

$$i(t) = 1 + 10^{-3} \frac{2\pi}{20 \cdot 10^{-3}} 15\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{20 \cdot 10^{-3}} t\right) \quad \text{soit} \quad i(t) = 1 + 6,66\sin(314t)$$

$$i(T/2) = 1 + 6,66 \sin(314 \cdot 10^{-3}) \quad \text{soit} \quad i(T/2) = 1,01\text{A} \quad \text{Cette valeur est bien positive.}$$

Pour déterminer le temps (noté t_2) au bout duquel i s'annule, on peut utiliser une calculatrice graphique et suivre la fonction à la "trace" (voir également à ce propos la remarque ci-après). On obtient sans difficulté

$$t_2 = 10,5\text{ms}$$

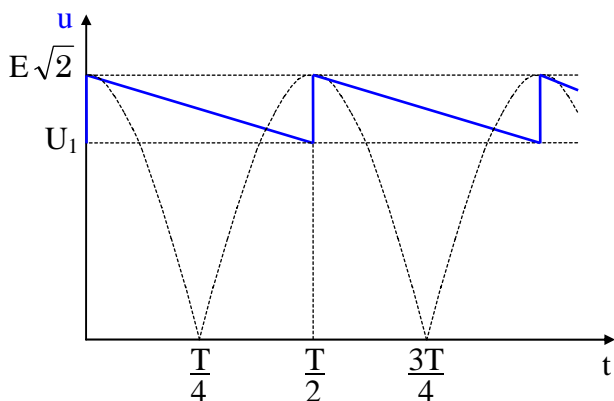
Ce temps est très proche de 10ms. L'hypothèse faite initialement (blocage du pont lorsque e passe par un extremum) est donc bien justifiée.

Remarque: On peut évidemment calculer directement t_2 à partir de $\sin(314t_2) = -1/6,66$. Le problème, c'est que $\arcsin(-1/6,66)$ donnerait un temps négatif. Il faut donc considérer tous les angles possibles vérifiant cette relation, soit $\arcsin(-1/6,66) + k\pi$ et $\pi - \arcsin(-1/6,66) + k'\pi$, et chercher celui qui conduit à t_2 compris entre 10ms et 15ms (donc à $314t_2$ compris entre π et $3\pi/2$). Seule le deuxième type de solutions, avec $k'=0$, permet de réaliser cette condition, d'où $t_2 = [\pi + \arcsin(1/6,66)]/100\pi = 10,48\text{ms}$.

La résolution numérique à partir du tracé permet de contourner cette difficulté, c'est pourquoi elle est suggérée par l'énoncé.

3) Calcul de P

Le courant dans le quadripôle étant constant, P se calcule directement par $(U_C - V)I$, avec U_C , valeur moyenne de u . Vu l'hypothèse faite au c), l'allure de u se présente comme indiqué ci-contre. On en déduit immédiatement



$$U_C = \frac{E\sqrt{2} + U_1}{2}, \quad \text{d'où} \quad P = \left(\frac{E\sqrt{2} + U_1}{2} - V \right) I, \quad \text{soit, numériquement}$$

$$P = \frac{E\sqrt{2} + 14}{2} - 12 = \frac{E}{\sqrt{2}} - 5.$$

Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous. On constate que P augmente rapidement avec E . Le choix d'une valeur élevée de tension d'alimentation, dictée par des considérations sur la taille du condensateur de filtrage, doit donc être tempéré par la puissance à dissiper dans le régulateur.

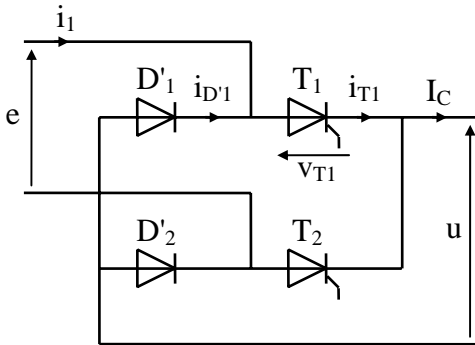
E(V)	12	15	18
P(W)	3,49	5,61	7,73

Pour les 3 montages, le courant de sortie est supposé ininterrompu et parfaitement lissé. Par ailleurs:

- La tension de sortie est égale à 0 si deux semi-conducteurs de même indice conduisent (ou si la diode de roue libre conduit) et + ou - e sinon.
- Les courants dans les semi-conducteurs valent I_C lorsque ceux-ci conduisent et 0 sinon. Le courant i_1 se déduit des courants dans les redresseurs reliés au point correspondant par la loi aux nœuds.
- Sauf pour le montage avec diode de roue libre, sur lequel nous reviendrons, la tension v_{T1} est égale à e lorsque le thyristor est bloqué et 0 sinon.

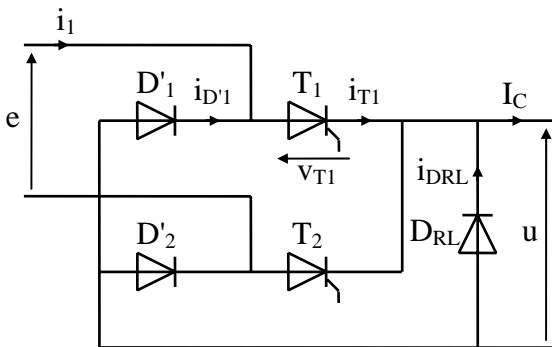
Les courbes correspondantes sont représentées page 3.

Montage symétrique



On applique la règle usuelle: les intervalles de conduction des thyristors sont décalés vers la droite d'un angle α par rapport à la conduction naturelle, ceux des diodes restant évidemment inchangés (les angles de conduction restent donc égaux, c'est pourquoi on parle de pont symétrique).
N.B.: Si on tient compte des paramètres réels des semi-conducteurs, la tension u n'est pas nulle pendant la phase de roue libre mais vaut de l'ordre de $-1,5$ à -2 volts.

Montage symétrique avec diode de roue libre



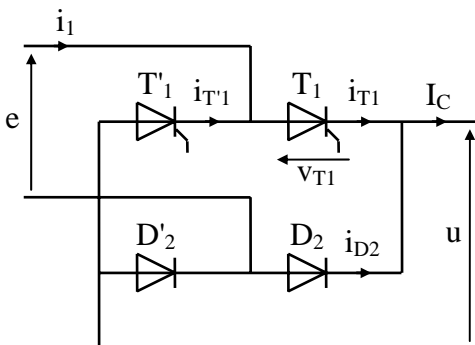
En dehors des phases de roue libre, le fonctionnement est identique au précédent car D_{RL} est polarisée négativement par la tension u et ne peut donc pas conduire. Par contre, comme dit précédemment, pendant ces phases, u devient négatif. Dès que cette tension atteint le seuil de D_{RL} , cette diode se met à conduire. Ceci a pour effet de maintenir u à une valeur inférieure au seuil cumulé des deux semi-conducteurs actuellement passants, donc de les bloquer (en réalité, comme leur tension anode-cathode reste légèrement positive, il

se passe un très faible courant, égal à celui avant amorçage du thyristor). En ce qui concerne la tension v_{T1} , il faut considérer deux cas lors des phases de roue libre:

- $e < 0$: D'_1 est polarisée en direct par la tension u (Cf. ce qui vient d'être dit en ce qui concerne la conduction résiduelle des redresseurs du pont). On a donc $v_{T1} = u - v_{D'1}$, valeur très proche de zéro.
- $e > 0$: D'_2 est polarisée positivement, ce qui a pour effet de reporter l'intégralité de e aux bornes de T_1 .

En fait, même si les phénomènes sont différents, l'allure de v_{T1} est la même que pour le montage symétrique.

Montage dissymétrique



Vu la structure du montage, la règle usuelle ne s'applique pas. Pour déterminer les intervalles de conduction, il faut considérer la suite des événements sur une période. On peut cependant se contenter d'étudier un des bras de pont, par exemple, celui constitué par T_1 et D_2 .

$\theta = \alpha$: T_1 s'amorce, ce qui a pour effet de bloquer D_2

$\theta = \pi$: La tension d'anode de D_2 devient positive. Comme ce redresseur n'est pas commandé, il s'amorce immédiatement, bloquant T_1 . Le courant

étant ininterrompu, D2 conduit jusqu'au prochain réamorçage de T₁, donc pendant un temps supérieur à une demi-période.

Les mêmes phénomènes régissant la commutation entre T'₁ et D'₁, il n'y a pas égalité des angles de conduction, d'où le qualificatif donné à ce type de pont.

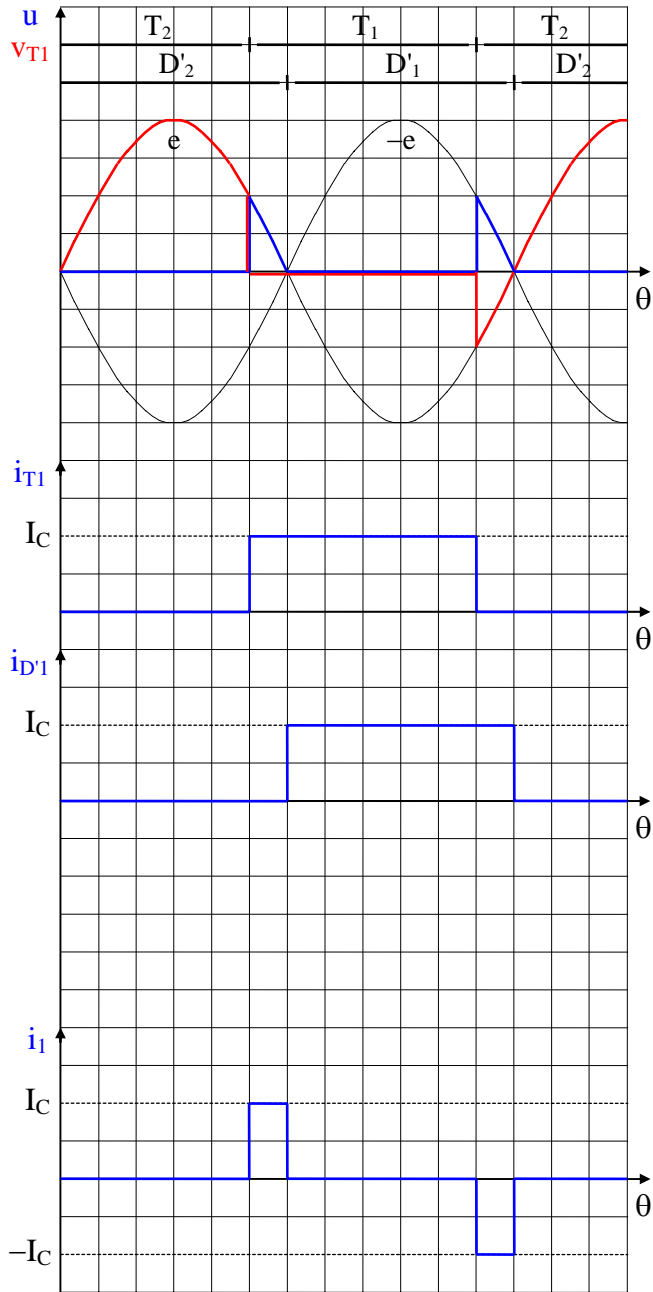
Conclusion

Dans le premier cas, la durée d'application de la tension inverse aux bornes du thyristor à bloquer devient de plus en plus faible au fur et à mesure que α se rapproche de π . Ceci peut conduire à des défauts de blocage dans le cas de charges absorbant un courant élevé sous faible tension (cas, par exemple, des machines à courant continu lorsqu'elles fournissent le couple nominal à faible vitesse, voire à l'arrêt). Avec ce type de charge, le montage symétrique est donc à proscrire.

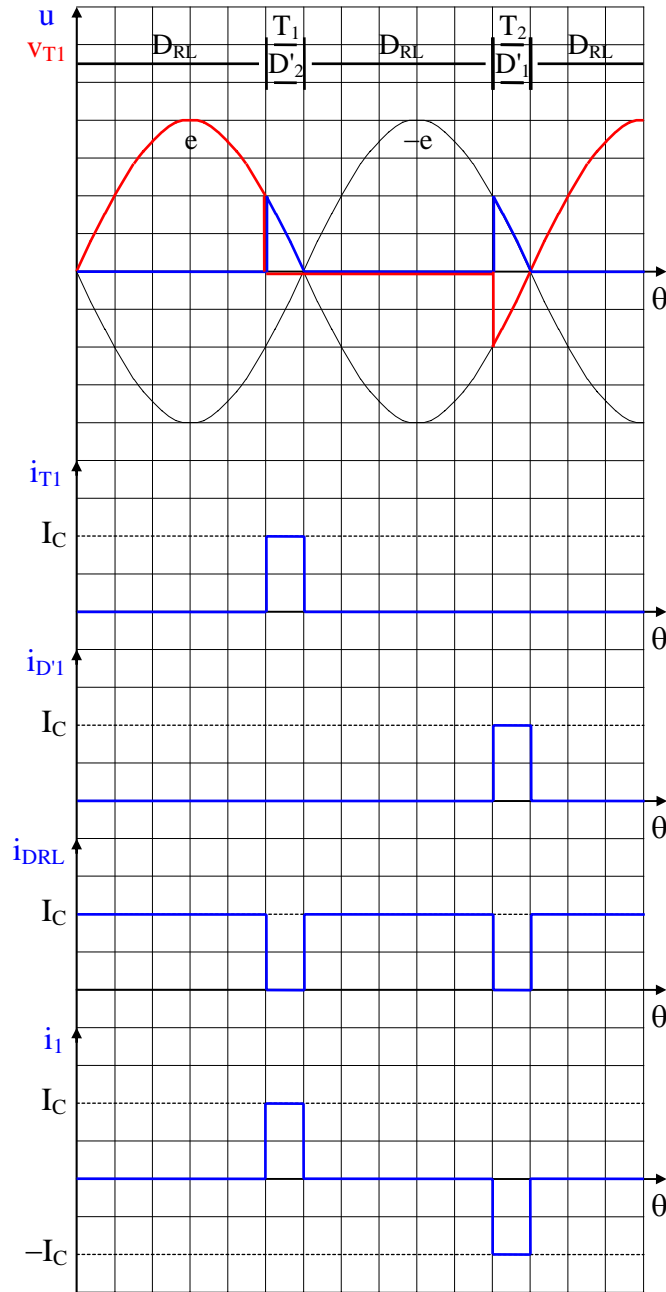
Pour les deux autres structures, le thyristor est polarisé sous une tension inférieure à son seuil ou négative pendant une demi-période du réseau d'alimentation, ce qui exclut tout risque de défaut de blocage. Ceci explique pourquoi on utilise systématiquement, soit le montage avec diode de roue libre, soit le pont dissymétrique, pour alimenter le type de charge évoqué ci-dessus.

N.B.: Comme, en triphasé, on ne peut pas dissymétriser le montage, il ne reste que la solution de la roue libre pour remédier au défaut de blocage dans le cas des montages PD3 mixtes.

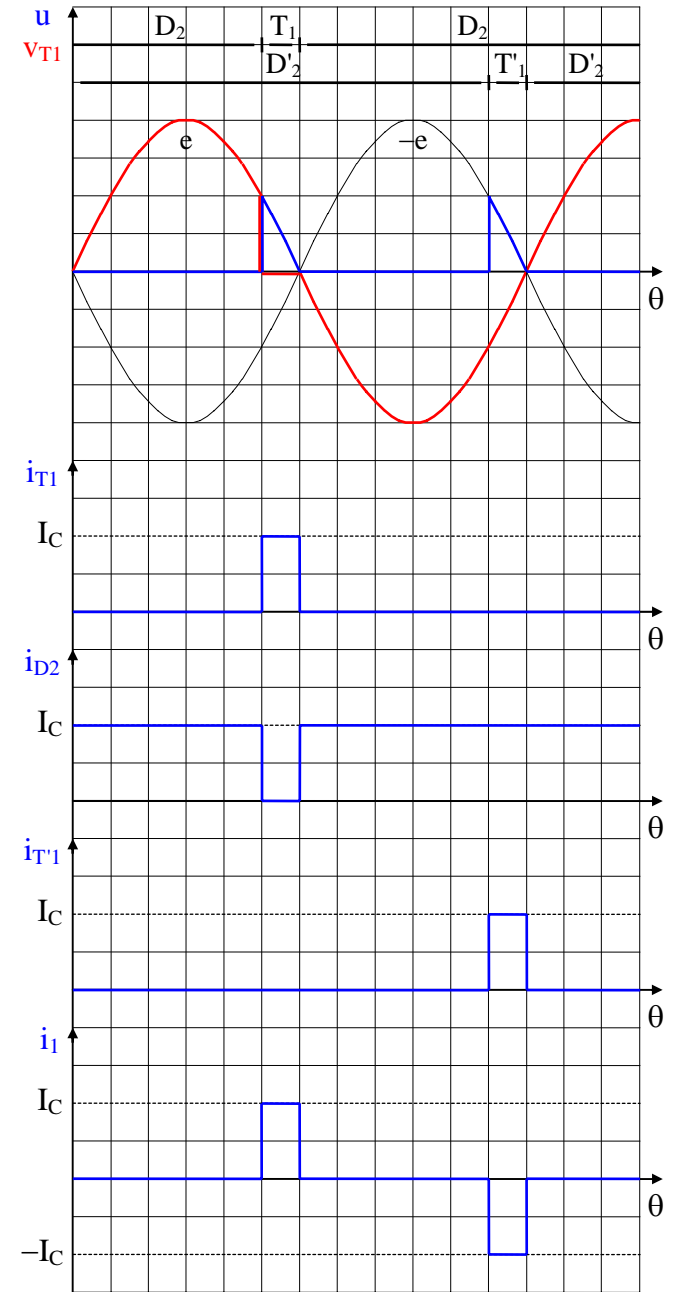
PONT SYMETRIQUE



PONT SYMETRIQUE AVEC D_{RL}

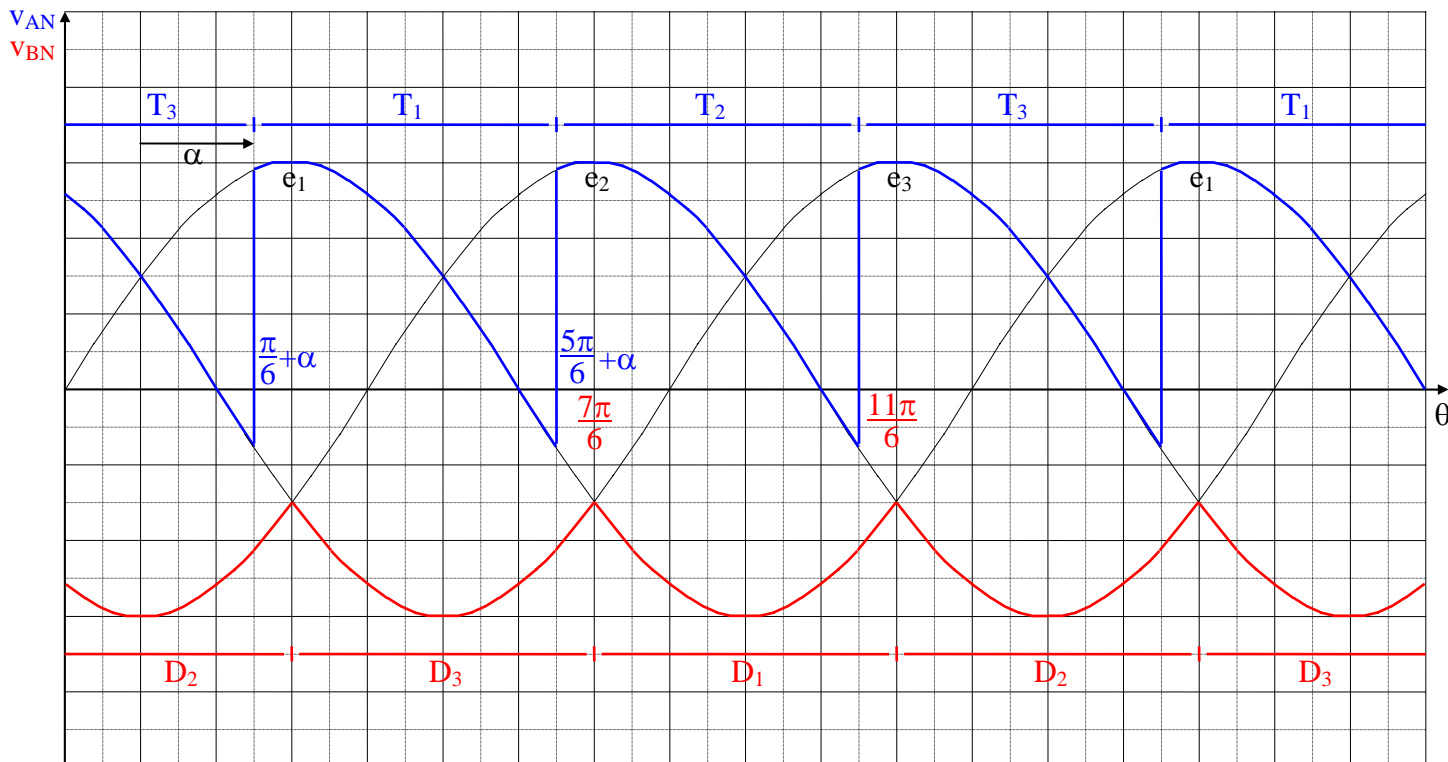


PONT DISSYMETRIQUE



1) Allure de v_{AN}

Les intervalles de conduction des thyristors sont décalés de α par rapport à la conduction naturelle. $v_{AN} = e_i$ où i est l'indice du thyristor qui conduit



Expression de V'_{ANC}

$$V'_{ANC} = \frac{1}{2\pi/3} \int_{\frac{\pi}{6}+\alpha}^{\frac{5\pi}{6}+\alpha} E\sqrt{2} \sin\theta d\theta \quad \text{soit} \quad V'_{ANC} = \frac{3\sqrt{6}E}{2\pi} \cos\alpha$$

2) Allure de v_{BN} voir ci-dessus

Expression de V_{BNC}

Deux méthodes possibles:

$$a) V_{BNC} = \frac{1}{2\pi/3} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} E\sqrt{2} \sin\theta d\theta \quad \text{soit} \quad V_{BNC} = -\frac{3\sqrt{6}E}{2\pi}$$

$$b) \text{Remarquer que } v_{AN} \text{ est confondu avec } v_{BN} \text{ pour } \alpha = \pi, \text{ donc que } V_{BNC} = \frac{3\sqrt{6}E}{2\pi} \cos\pi = -\frac{3\sqrt{6}E}{2\pi}$$

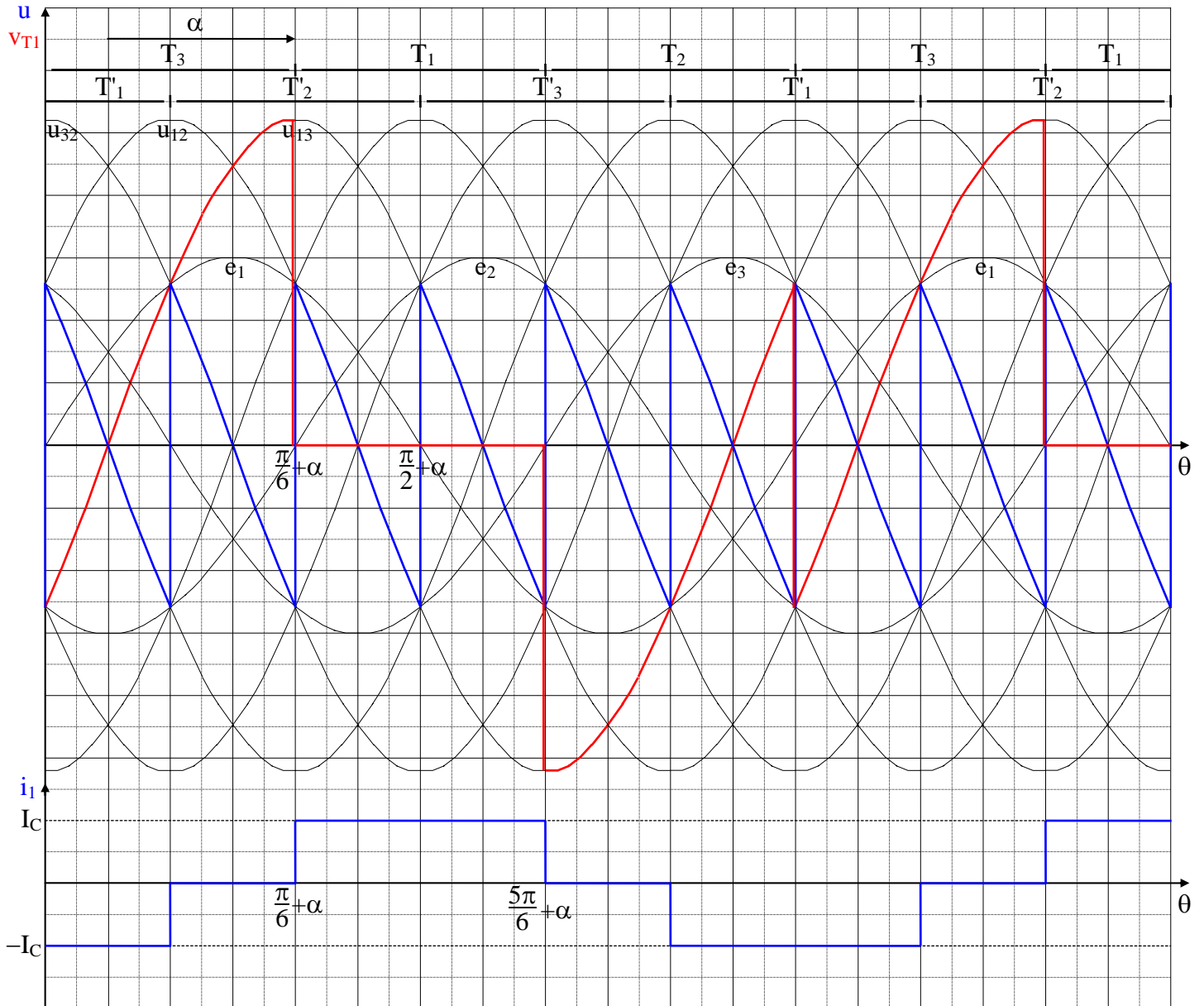
3) Expression de U'_C

$$u = v_{AN} - v_{BN} \Rightarrow U'_C = V'_{ANC} - V_{BNC} = \frac{3\sqrt{6}E}{2\pi} \cos\alpha - \left(-\frac{3\sqrt{6}E}{2\pi}\right) \quad \text{soit} \quad U'_C = \frac{3\sqrt{6}E}{2\pi} (1 + \cos\alpha)$$

1) Allures de u , v_{T1} et i_1

Les intervalles de conduction de tous les thyristors sont décalés vers la droite de 90° par rapport à la conduction naturelle. Compte tenu de ceci:

- La tension u est égale à u_{ij} , où i et j sont les indices des thyristors qui conduisent. En fait, comme la période de la tension de sortie est au maximum égale à celle du réseau d'alimentation divisée par le nombre de phases, on peut se contenter de faire l'étude sur $2\pi/3$ et de compléter par "recopie".
- La tension v_{T1} est égale à u_{1i} , où i est l'indice du thyristor de la même colonne qui conduit.
- Le courant i_1 est égal à I_C si T_1 conduit, à $-I_C$ si T'_1 conduit et à zéro sinon.



2) Expressions de U'_C , I_1 et de f'_s

$$U'_C = \frac{1}{\pi/3} \int_{\frac{\pi}{6}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} u_{12} d\theta \quad u_{12} = e_1 - e_2 = E\sqrt{2} \sin\theta - E\sqrt{2} \sin(\theta - 2\pi/3) = E\sqrt{6} \cos(\theta - \pi/3) \Rightarrow$$

$$U'_C = \frac{1}{\pi/3} \int_{\frac{\pi}{6}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} E\sqrt{6} \cos(\theta - \pi/3) d\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{U'_C = \frac{3\sqrt{6}E}{\pi} \cos\alpha}$$

$$I_1^2 = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{\frac{\pi}{6}+\alpha}^{\frac{5\pi}{6}+\alpha} I_C^2 d\theta = \frac{2}{3} I_C^2 \Rightarrow \boxed{I_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} I_C}$$

Comme la puissance active peut devenir négative et que le facteur de puissance est, a priori, un nombre positif, on peut, pour éviter d'avoir à considérer les deux cas, définir f'_s par $\frac{|P|}{S_s}$. Compte tenu de ceci, il vient

$$f'_s = \frac{|U'_C I_C|}{3EI_1} = \frac{\left| \frac{3\sqrt{6}E}{\pi} \cos\alpha I_C \right|}{3E\sqrt{\frac{2}{3}} I_C} \quad \text{soit} \quad \boxed{f'_s = \frac{3}{\pi} |\cos\alpha|}$$

Application numérique

$$U'_C = \frac{3\sqrt{6} 220}{\pi} \cos\alpha = 515 \cos\alpha$$

d'où

$$\boxed{\alpha = 0^\circ: U'_C = 515V \quad f'_s = 0,955 \quad \alpha = 150^\circ: U'_C = -446V \quad f'_s = 0,827}$$

1)a) Intervalles de conduction – Allures de u_1 et de i_{s1}

On les obtient comme habituellement (Cf. par exemple exercice 10). Voir page 3 pour tous les tracés.

b) Expression de U'_{1C}

On peut procéder comme dans l'exercice 10 ou bien utiliser comme intervalle d'intégration $[-\pi/6 + \alpha; \pi/6 + \alpha]$. Dans ce cas, $u_1 = u_{32}$, qui est la tension composée maximale à l'origine, donc qui s'écrit $E\sqrt{6} \cos\theta$. On a donc:

$$U'_{1C} = \frac{1}{\pi/3} \int_{-\pi/6+\alpha}^{\pi/6+\alpha} E\sqrt{6} \cos\theta d\theta = \frac{3\sqrt{6}E}{\pi} \cos\alpha \equiv U_{1C} \cos\alpha \quad \text{avec} \quad U_{1C} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} E$$

Vu le couplage, on a $E = \frac{nU}{\sqrt{3}}$, ce qui, reporté dans U_{1C} donne $U_{1C} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} \frac{nU}{\sqrt{3}}$ soit $U_{1C} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} nU$

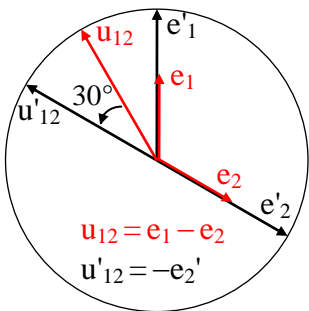
A.N.: $U_{1C} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} 0,3 \cdot 400 \cdot 10^3$ soit $U_{1C} = 162 \text{ kV}$

2)a) Intervalles de conduction – Allures de u_2, i_1, i_3 et i'_{s1}

La démarche est la même qu'au 1) sauf que la conduction naturelle pour T_1 commence à zéro (puisqu'il s'agit d'un montage série). Par ailleurs, $i'_{s1} = \frac{i_1 - i_3}{3}$ (Cf. exercice 3 pour la démonstration de cette relation).

b) Justification

Bien qu'on parle d'un montage parallèle et d'un montage série, les deux ponts redresseurs sont identiques, la différence se situant uniquement au niveau du couplage des enroulements au secondaire du transformateur. Par contre, Cf. diagramme vectoriel ci-contre, cette différence de couplage entraîne un déphasage de 30° entre les tensions composées alimentant chacun des deux ponts. Comme, vu les relations entre les rapports de nombres de spires (rappel: $n' = \sqrt{3} n$), ces tensions ont même valeur crête, il s'ensuit que u_1 et u_2 sont identiques au décalage de 30° près, ce qui entraîne par ailleurs que leurs valeurs moyennes sont égales, donc que $U'_{2C} = U'_{1C}$.



3)a) Allures de u et de i_{L1}

Vu la mise en série, $u = u_1 + u_2$. En ce qui concerne le courant, comme i_{s1} et i'_{s1} sont à valeur moyenne nulle, on a simplement $i_{L1} = n \cdot i_{s1} + n' \cdot i'_{s1} = 0,3 \cdot i_{s1} + 0,3 \cdot \sqrt{3} i'_{s1}$, soit $i_{L1} = 0,3 \cdot i_{s1} + 0,52 \cdot i'_{s1}$. Pour le tracé, on peut remarquer que, vu les différents axes de symétrie de ces courants, il suffit d'étudier l'intervalle $[\pi/6; 2\pi/3]$, puis d'en déduire le reste de la courbe compte tenu de ces symétries.

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} : i_{s1} = 0 \quad i'_{s1} = \frac{I_C}{3} \Rightarrow i_{L1} = 0,52 \frac{I_C}{3} = 0,173 I_C$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} : i_{s1} = I_C \quad i'_{s1} = \frac{I_C}{3} \Rightarrow i_{L1} = 0,3 I_C + 0,52 \frac{I_C}{3} = 0,473 I_C$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} : i_{s1} = I_C \quad i'_{s1} = \frac{2I_C}{3} \Rightarrow i_{L1} = 0,3 I_C + 0,52 \frac{2I_C}{3} = 0,647 I_C$$

b) Expression de U'_C

$u = u_1 + u_2 \Rightarrow U'_C = U'_{1C} + U'_{2C}$. Comme $U'_{1C} = U'_{2C}$, on a $U'_C = 2U'_{1C} = 2U_{1C} \cos\alpha \equiv U_C \cos\alpha$ avec $U_C = 2U_{1C}$,

soit

$$U_C = \frac{6\sqrt{2}}{\pi} nU$$

A.N.: $U_C = 2 \cdot 162 \cdot 10^3$ soit $U_C = 324 \text{ kV}$

c) Relation entre φ_1 et α

Le fondamental étant centré sur i_{L1} , on voit sur le tracé que le déphasage entre i_{L1} et e_1 (ou e'_1) est égal à α . Comme cette tension est en phase avec v_1 , il vient immédiatement $\varphi_1 = \alpha$

d) Expressions de P_a et de Q_a

$$\begin{cases} P_a = 3VI_1 \cos \varphi_1 = \sqrt{3}UI_1 \cos \varphi_1 \\ Q_a = P_a \tan \varphi_1 \\ \varphi_1 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_a = \sqrt{3} UI_1 \cos \alpha \quad Q_a = \sqrt{3} UI_1 \sin \alpha}$$

e) Expression de I_1

$$\begin{cases} P = U'_C I_C = \frac{6\sqrt{2}nU}{\pi} \cos \alpha I_C \\ P = P_a = \sqrt{3}UI_1 \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{6\sqrt{2}nU}{\pi} \cos \alpha I_C = \sqrt{3}UI_1 \cos \alpha \quad \text{soit} \quad \boxed{I_1 = \frac{2\sqrt{6}}{\pi} nI_C}$$

A.N.: $I_C = \frac{P}{U'_C} = \frac{500 \cdot 10^6}{300 \cdot 10^3}$ soit $I_C = 1670 \text{ A}$ $\alpha = \arccos\left(\frac{U'_C}{U_C}\right) = \arccos\left(\frac{300 \cdot 10^3}{324 \cdot 10^3}\right)$ soit $\alpha = 22,2^\circ$

$I_1 = \frac{2\sqrt{6} \cdot 0,3}{\pi} 1670$ soit $I_1 = 781 \text{ A}$ $Q_a = \sqrt{3} 400 \cdot 10^3 \cdot 781 \sin 22,2$ soit $Q_a = 204 \text{ MVAR}$

Calculs de I_{L1} , S_a et D_a

$I_1 = \sqrt{\frac{2}{3}(2 + \sqrt{3})} 0,3 \cdot 1670$ soit $I_{L1} = 790 \text{ A}$ $S_a = \sqrt{3} U \cdot I_{L1} = \sqrt{3} 400 \cdot 10^3 \cdot 790$ soit $S_a = 547 \text{ MVAR}$

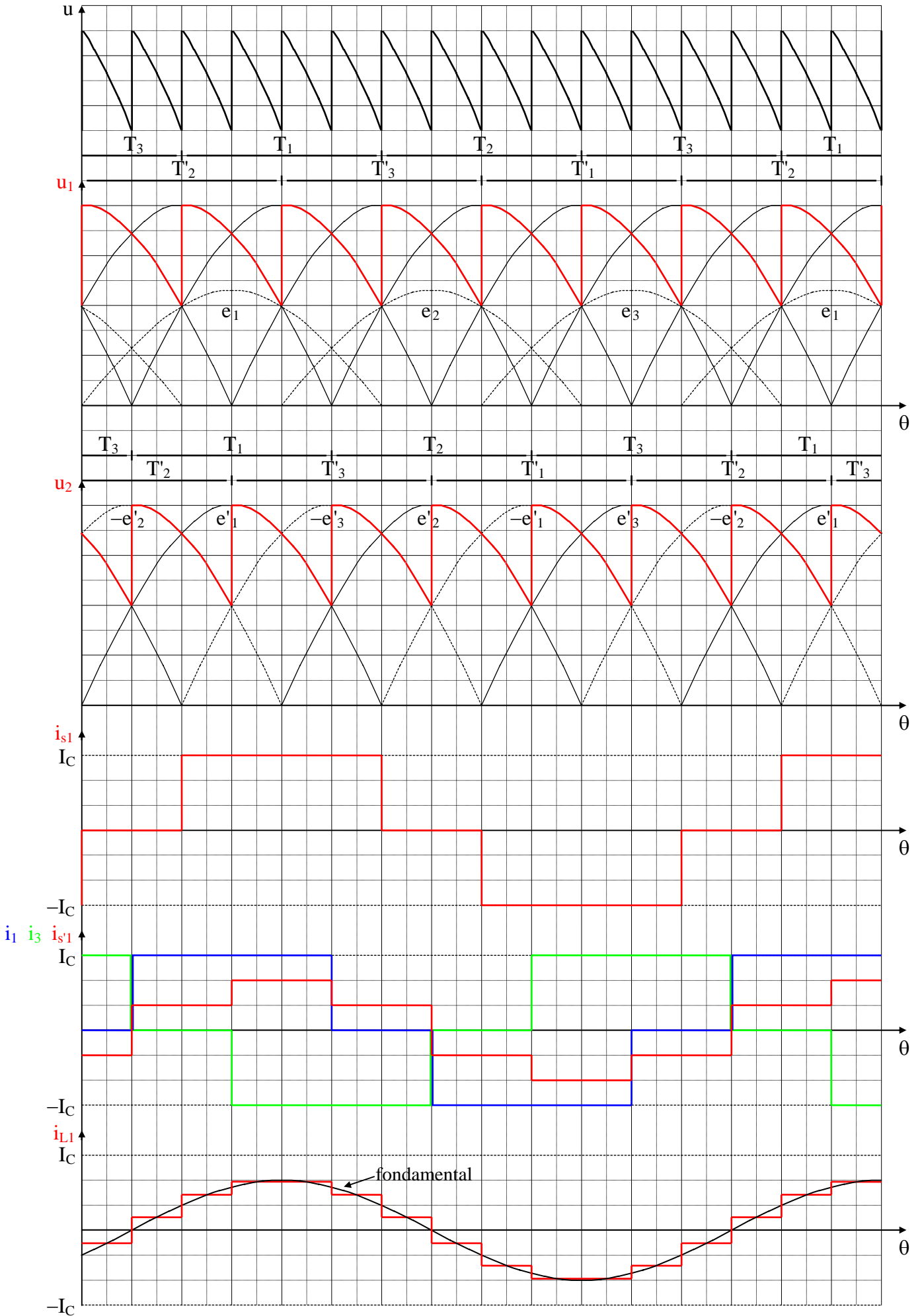
$D_a = \sqrt{S_a^2 - P_a^2 - Q_a^2} = \sqrt{547^2 - 500^2 - 204^2} \cdot 10^3$ soit $D_a = 87 \text{ MVA}$

f) Structure de chaque branche

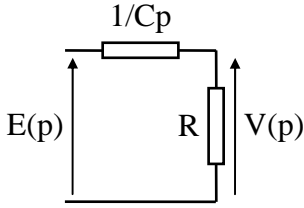
Chaque branche est parcourue par un courant de valeur moyenne $I_C/3 = 560 \text{ A}$, de valeur efficace $I_C/\sqrt{3} = 964 \text{ A}$ et de valeur crête $I_C = 1670 \text{ A}$. Les valeurs limites actuelles pour un thyristor étant de l'ordre de 2 kA , il est inutile d'envisager une mise en parallèle.

La d.d.p. maximale aux bornes de chaque branche est de $E\sqrt{6}$, soit $nU\sqrt{2}/\sqrt{3} = 170 \text{ kV}$. Comme les valeurs maximales actuelles pour un thyristor sont de 3 à 6 kV , il faut utiliser un groupement en série.

En prenant, par exemple, de l'ordre de 3 kV par thyristor, chaque branche sera donc constituée par la mise en série de 60 thyristors (avec tout ce qui s'ensuit comme dispositifs d'équilibrages statique et dynamique des tensions et le circuit de commande simultané adéquat).



1) Tracé du schéma opérationnel



Celui-ci (Cf. ci-contre) s'obtient en remplaçant les fonctions du temps par des fonctions de p , le condensateur par une impédance $1/Cp$ et en conservant tel quel le résistor. D'autre part, l'association de la tension continue E et de l'interrupteur est équivalente à un générateur de tension en échelon d'amplitude E . On a donc $E(p) = \frac{E}{p}$.

2) Expressions de $V(p)$ et de $v(t)$

$1/Cp$ et R formant un diviseur potentiométrique, il vient immédiatement $V(p) = \frac{R}{R + 1/Cp} \frac{E}{p} = \frac{RCp}{RCp + 1} \frac{E}{p}$, soit,

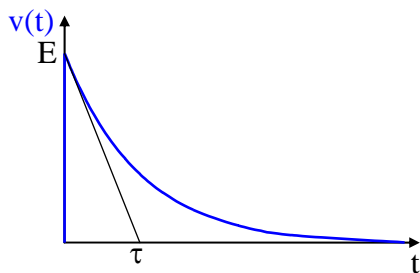
avec $\tau = RC$,

$$V(p) = \frac{\tau}{\tau p + 1} E$$

Les tables de transformées usuelles ne fournissant que celle correspondant à $\frac{1}{p+a}$, on divise le numérateur et

le dénominateur par τ , soit $V(p) = \frac{E}{p + 1/\tau}$, d'où on déduit $v(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$

3) Allure de $v(t)$ – Justification des valeurs initiale et finale

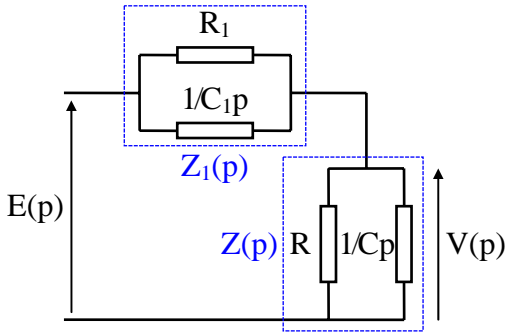


$v(t)$ est une exponentielle décroissant avec la constante de temps τ entre les valeurs E et 0 , son évolution est donc celle représentée ci-contre. Ses valeurs initiale et finale se retrouvent de la façon suivante:

Initialement, le condensateur est déchargé. Comme la tension $v_1(t)$ ne peut pas subir de discontinuité, celle-ci reste nulle après la fermeture de l'interrupteur. Toute la d.d.p. E est donc reportée aux bornes du résistor, ce qui entraîne $v(0) = E$.

Lorsque l'évolution est terminée, le condensateur est chargé et le courant qui le traverse est nul. La tension $v(t) = Ri(t)$ l'est donc également, d'où $v(\infty) = 0$.

1) Expression de T(p)



Le schéma opérationnel peut se représenter comme indiqué ci-contre.

En raisonnant dans un premier temps sur les groupements Z_1 et Z , il vient $T(p) = \frac{Z(p)}{Z_1(p) + Z(p)} = \frac{Y_1(p)}{Y_1(p) + Y(p)}$ avec $Y_1(p) = \frac{1}{R_1} + C_1p$ et

$Y(p) = \frac{1}{R} + Cp$. En remplaçant ensuite les admittances par leurs ex-

pressions, on a $T(p) = \frac{\frac{1}{R_1} + C_1p}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + (C_1 + C)p} = \frac{1}{R_1} \frac{1 + R_1C_1p}{\frac{R_1 + R}{R_1R} + (C_1 + C)p}$,

soit, finalement

$$T(p) = \frac{R}{R_1 + R} \frac{1 + R_1C_1p}{1 + \frac{R_1R}{R_1 + R}(C_1 + C)p}$$

2) Expressions de K, τ_1 et τ_2

Par identification, il vient immédiatement

$$K = \frac{R}{R_1 + R} \quad \tau_1 = R_1C_1 \quad \tau_2 = \frac{R_1R}{R_1 + R}(C_1 + C)$$

3) Réponse à un échelon de tension

$$V(p) = T(p) \cdot E(p) \text{ avec } E(p) = \frac{E}{p} \Rightarrow V(p) = K \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1} \frac{E}{p}$$

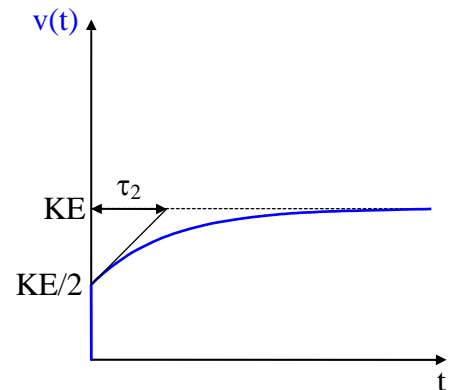
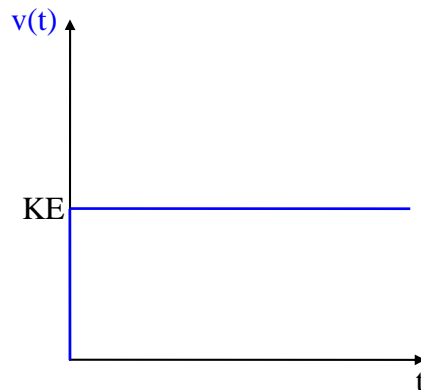
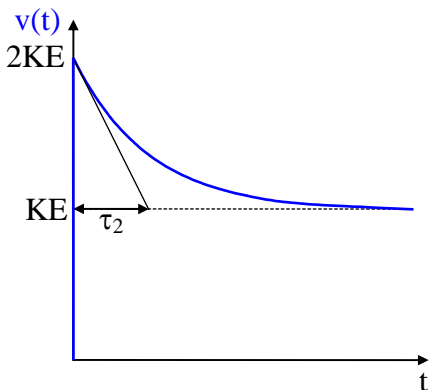
Or, $\frac{\tau_1 p + 1}{(\tau_2 p + 1)p} = \frac{1}{p} + \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2 p + 1} = \frac{1}{p} + \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} \frac{1}{p + 1/\tau_2}$. D'où $v(t) = KE \left(1 + \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$

Allure de v(t)

$$\tau_2 = 0,5\tau_1: v(t) = KE \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

$$\tau_2 = \tau_1: v(t) = KE$$

$$\tau_2 = 2\tau_1: v(t) = KE \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$



4) Expression de T(j ω) – Diagrammes

$$\underline{T}(j\omega) = T(p) \text{ pour } p = j\omega \Rightarrow \underline{T}(j\omega) = K \frac{1 + j\tau_1\omega}{1 + j\tau_2\omega}$$

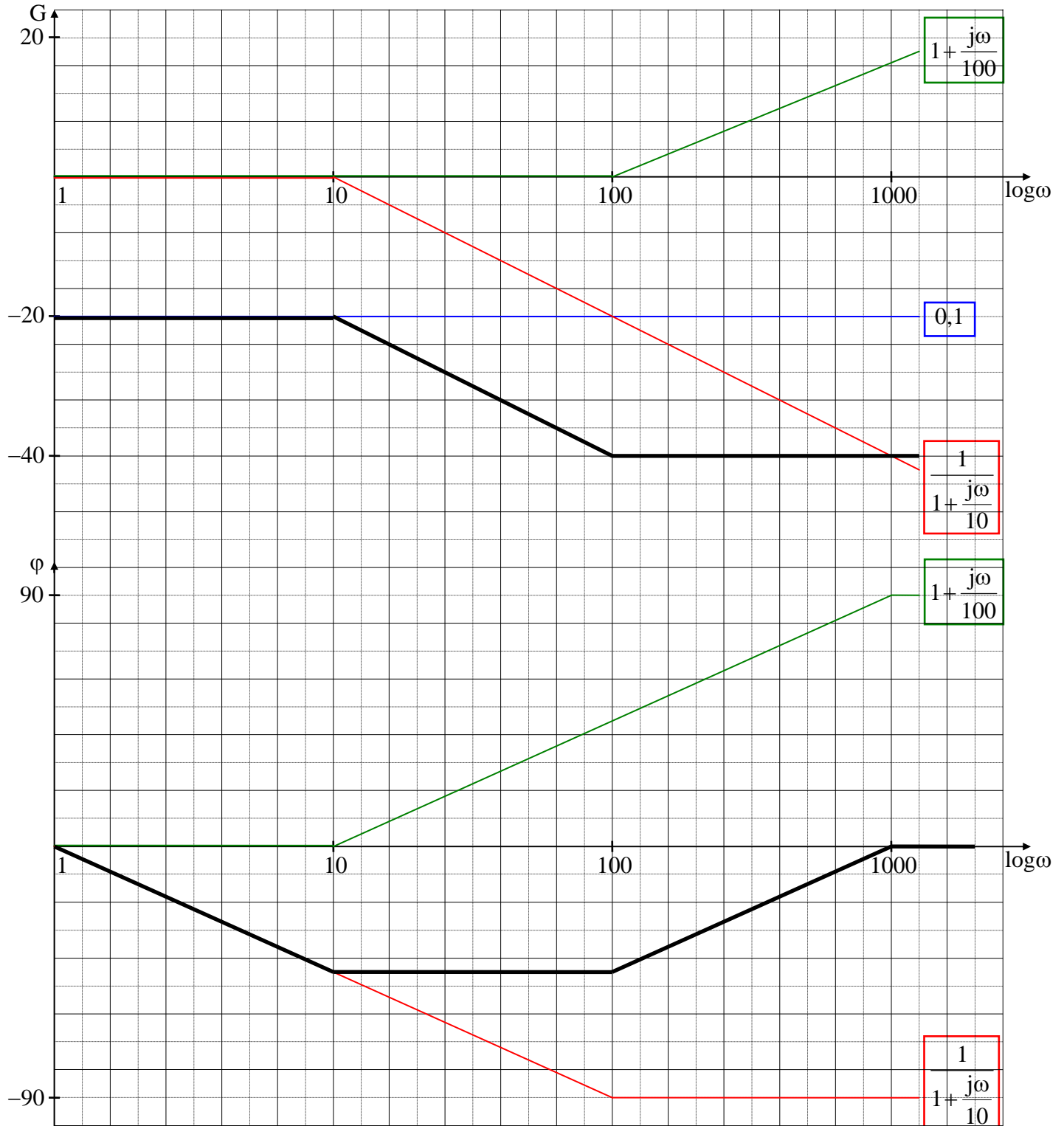
A.N.: $\underline{T}(j\omega) = 0,1 \frac{1 + j0,01\omega}{1 + j0,1\omega}$ soit

$$\underline{T}(j\omega) = 0,1 \frac{1 + \frac{j\omega}{100}}{1 + \frac{j\omega}{10}}$$

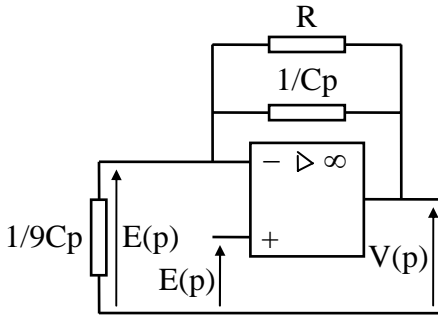
Pour les tracés, on commence par représenter les diagrammes correspondants à chacune des fonctions

élémentaires $0,1$, $1 + \frac{j\omega}{100}$ et $\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{10}}$ puis on effectue leur somme pour obtenir G et φ . On rappelle que:

- Une constante positive A donne une horizontale à $20\log A$ et un argument nul
- Un terme de type $1 + j\omega/\omega_0$ donne
 - un gain nul jusqu'à $\omega = \omega_0$ puis croissant à 20dB/décade ensuite
 - un argument que l'on approxime ici de la façon suivante: nul jusqu'à $\omega = \omega_0/10$, croissant à $45^\circ/\text{décade}$ jusqu'à $\omega = 10\omega_0$ et égal à 90° ensuite.
- Un terme de type $1/(1 + j\omega/\omega_0)$ donne les courbes symétriques des précédentes par rapport à l'origine.



1) Expression de T(p)



On suppose évidemment que l'amplificateur opérationnel est parfait. Comme il fonctionne dans son domaine linéaire, le potentiel de l'entrée – est égal à celui de l'entrée +, donc à E(p) (Cf. schéma opérationnel ci-contre).

En appliquant alors le théorème de Millmann à cette entrée, on a

$$E(p) = \frac{\frac{V(p)}{R} + C_p V(p)}{9C_p + \frac{1}{R} + C_p} = \frac{1 + RC_p}{1 + 10RC_p} V(p)$$

d'où $V(p) = \frac{1 + 10RC_p}{1 + RC_p} E(p)$ ce qui entraîne, avec $\tau = RC$,

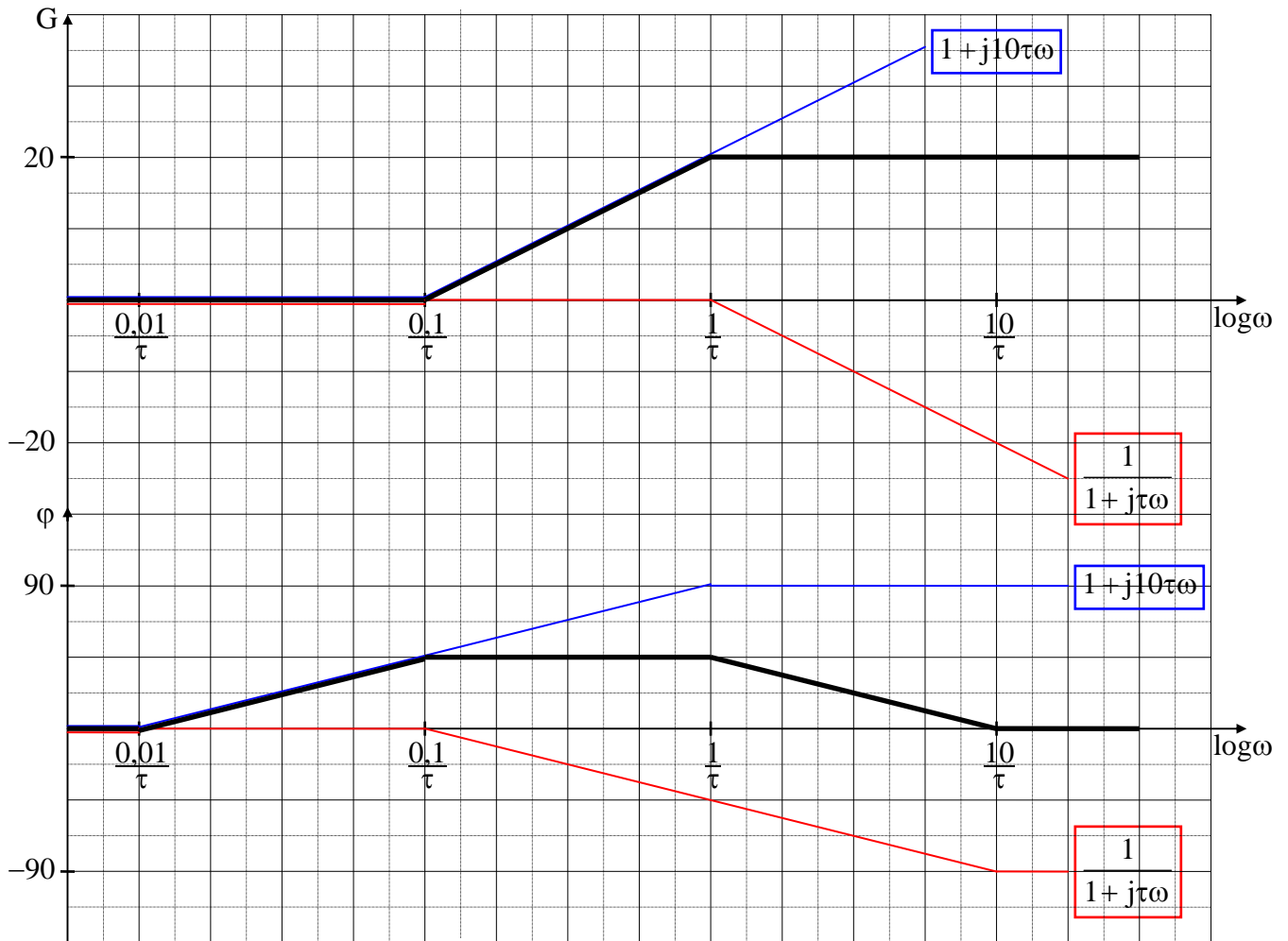
$$T(p) = \frac{1 + 10\tau p}{1 + \tau p}$$

2)a) Expression de T(jω) – Diagrammes

$T(j\omega) = T(p)$ pour $p = j\omega \Rightarrow T(j\omega) = \frac{1 + j10\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$

On se reportera à l'exercice 13 pour le reste des

différentes justifications. Signalons simplement que les pulsations caractéristiques ω_0 valent ici respectivement $1/10\tau$ (soit $0,1/\tau$) et $1/\tau$.

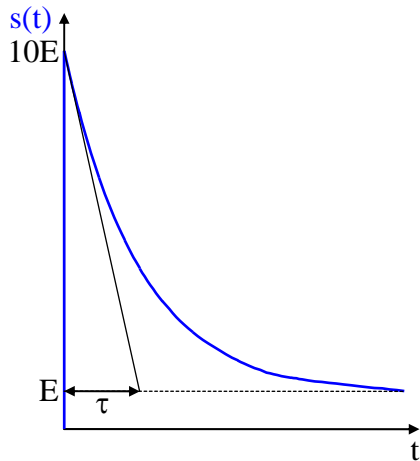


b) Expression de $s(t)$

$$S(p) = T(p) \cdot E(p) \quad \text{avec } E(p) = \frac{E}{p} \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{10\tau p + 1}{\tau p + 1} \frac{E}{p} \quad \text{or} \quad \frac{10\tau p + 1}{\tau p + 1} \frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{9\tau}{\tau p + 1} = \frac{1}{p} + \frac{9}{p + 1/\tau} \quad \text{d'où}$$

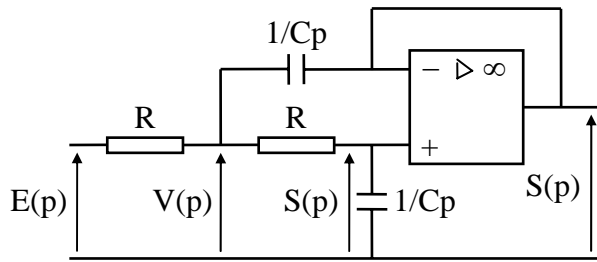
$$s(t) = E \left(1 + 9e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Allure de $s(t)$



1) Expression de T(p)

L'amplificateur étant monté en suiveur, le potentiel de l'entrée + est égal à celui de la sortie, d'où le schéma ci-



contre. En appliquant les lois aux nœuds à cette entrée et au point où aboutit V(p), il vient

$$\begin{cases} \frac{V(p) - E(p)}{R} + \frac{V(p) - S(p)}{R} + \frac{V(p) - S(p)}{1/Cp} = 0 \\ \frac{S(p) - V(p)}{R} + \frac{S(p)}{1/Cp} = 0 \end{cases}$$

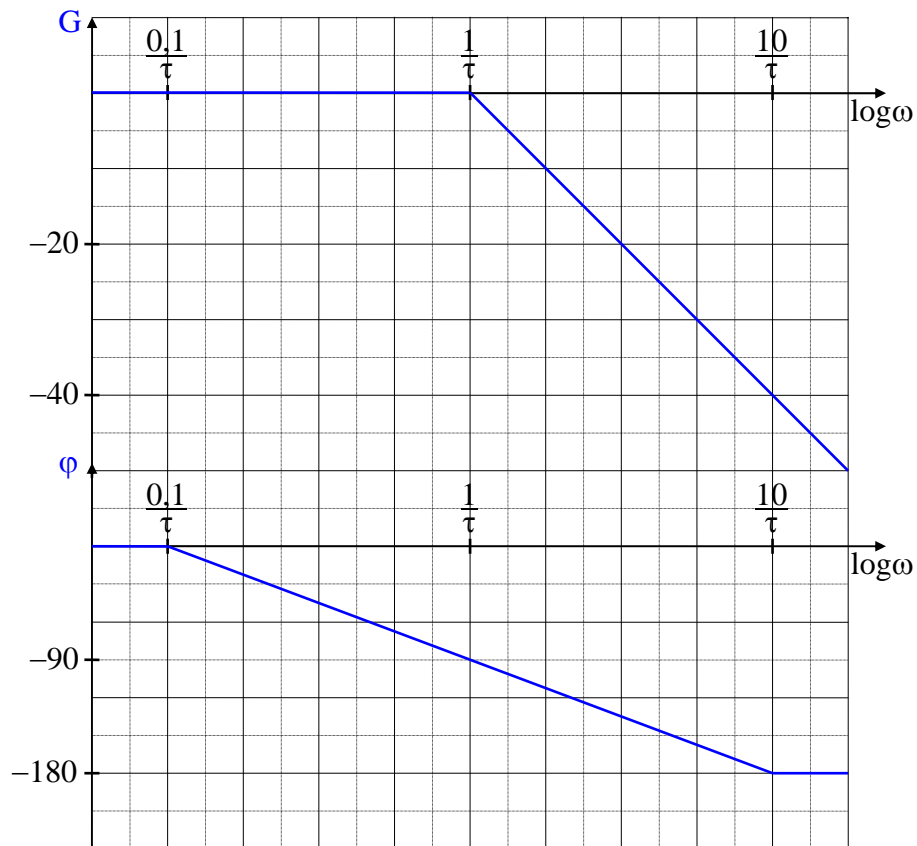
L'élimination de V(p) entre les deux relations conduit à $[(1 + RCp)(2 + RCp) - (1 + RCp)]S(p) = E(p)$ dont on

déduit $T(p) = \frac{1}{(RCp + 1)^2}$ soit $T(p) = \frac{1}{(\tau p + 1)^2}$ en posant $\tau = RC$

2)a) Expression de T(jω) – Diagrammes

On procède comme dans les exercices 13 et 14.

$$T(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\tau\omega)^2}$$



b) Expression de s(t)

$S(p) = T(p) \cdot E(p)$ avec $E(p) = E/p \Rightarrow S(p) = \frac{1}{(\tau p + 1)^2} \frac{E}{p}$ or $\frac{1}{(\tau p + 1)^2} \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{(\tau p + 1)^2} - \frac{\tau}{\tau p + 1}$ d'où

$S(p) = E \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau} \frac{1}{(p + 1/\tau)^2} - \frac{1}{p + 1/\tau} \right)$ dont on déduit $s(t) = E \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{t}{\tau} + 1 \right) \right]$

Valeurs aux limites

$$\boxed{s(0) = 0}$$

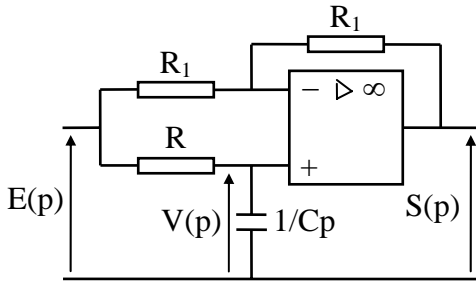
$$\boxed{s(\infty) = E}$$

Utilisation des théorèmes aux limites

$$s(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} (pS(p)) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p \frac{1}{(\tau p + 1)^2} \frac{E}{p} \right) = 0$$

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (pS(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{1}{(\tau p + 1)^2} \frac{E}{p} \right) = E$$

1) Expression de T(p)



Le schéma opérationnel s'établit comme indiqué ci-contre. Le potentiel de l'entrée – étant égal à celui de l'entrée +, soit V(p), il vient, par

application de Millmann
$$\begin{cases} V(p) = \frac{E(p)/R_1 + S(p)/R_1}{2/R_1} \\ V(p) = \frac{CpE(p)}{1/R + Cp} \end{cases}$$

De la première relation, on déduit $V(p) = \frac{E(p) + S(p)}{2}$, ce qui reporté dans la deuxième, donne, après simplifi-

cation, $S(p) = \frac{1 - RCp}{1 + RCp} E(p)$. On en déduit
$$\boxed{T(p) = \frac{1 - \tau p}{1 + \tau p}}$$
 avec $\tau = RC$.

2)a) Expressions de T(jω), de son module T et de son argument φ

$\underline{T}(j\omega) = T(p)$ pour $p = j\omega \Rightarrow \boxed{\underline{T}(j\omega) = \frac{1 - j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}}$

Le numérateur de \underline{T} étant égal au conjugué de son dénominateur, il vient immédiatement $\boxed{T = 1}$

D'autre part, φ est égal à deux fois l'argument du numérateur, donc à $2 \cdot \arctan(-\tau\omega)$. D'où

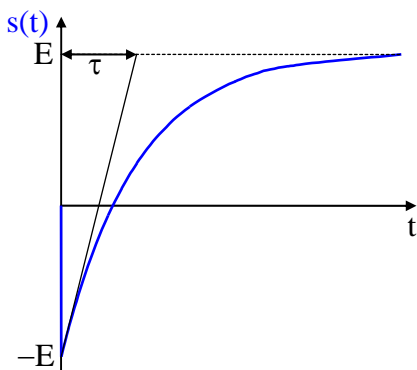
$$\boxed{\varphi = -2\arctan(\tau\omega)}$$

b) Expression de s(t)

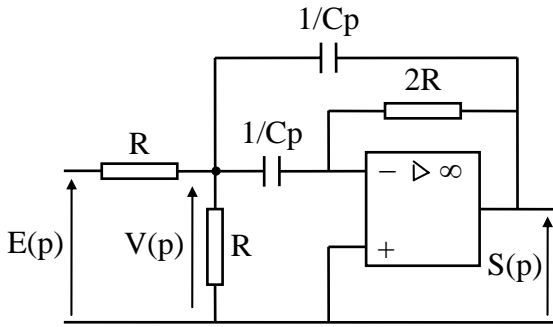
$S(p) = T(p) \cdot E(p)$ avec $E(p) = E/p \Rightarrow S(p) = \frac{1 - \tau p}{1 + \tau p} \frac{E}{p} = \left(\frac{1}{p} - \frac{2\tau}{\tau p + 1} \right) E = \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p + 1/\tau} \right) E$ d'où

$$\boxed{s(t) = E \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}$$

Allure de s(t)



1) Expression de T(p)



Le schéma opérationnel s'établit comme indiqué ci-contre. Le potentiel de l'entrée – est égal à celui de l'entrée +, soit 0. En appliquant les lois aux nœuds à cette entrée et au point où aboutit V(p), il vient

$$\begin{cases} C_p V(p) + \frac{S(p)}{2R} = 0 \\ \frac{V(p) - E(p)}{R} + \frac{V(p)}{R} + C_p V(p) + C_p (V(p) - S(p)) = 0 \end{cases}$$

Par élimination de V(p) entre les deux relations, on obtient $-\frac{S(p)}{2RC_p} \left(\frac{2}{R} + 2C_p \right) - \frac{E(p)}{R} - C_p S(p) = 0$

d'où, finalement,

$$T(p) = -\frac{RC_p}{(RC_p)^2 + RC_p + 1}$$

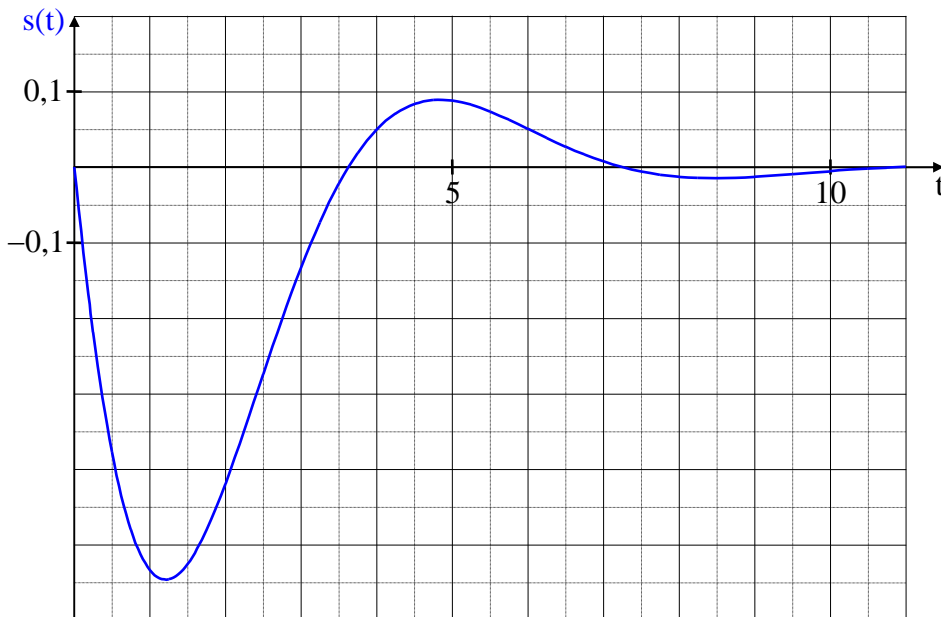
2)a) Expression de S(p)

$$S(p) = T(p) \cdot E(p) \quad \text{avec } E(p) = 1/p \text{ et } RC = 10^6 \cdot 10^{-6} = 1s \Rightarrow S(p) = -\frac{p}{p^2 + p + 1} \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2 + p + 1}$$

Le discriminant du dénominateur valant -3 , il faut mettre celui-ci sous la forme correspondant à la transformée du produit d'une exponentielle par une fonction trigonométrique, d'où l'expression $\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ suggérée par l'énoncé. Par ailleurs, comme le numérateur est constant, il s'agit de la transformée d'un terme de type $e^{at} \sin(\omega t)$. On complète donc la modification en y faisant apparaître la pulsation $\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où, finalement,

$$S(p) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \frac{2}{\sqrt{3}}$$

b) Expression de s(t) – Allure

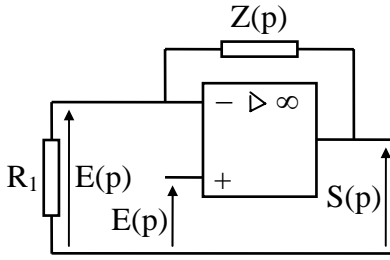


Il vient immédiatement

$$s(t) = -\frac{2}{\sqrt{3}} E e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

dont l'allure est représentée ci-contre.

1) Expression de T(p)



En appliquant la démarche suggérée par l'énoncé, et compte tenu du fait que le potentiel de l'entrée – est égal à celui de l'entrée +, le schéma opérationnel est celui indiqué ci-contre. On en déduit $E(p) = \frac{R_1}{R_1 + Z(p)} S(p)$ soit

$$S(p) = \left(1 + \frac{Z(p)}{R_1}\right) E(p)$$

$$Z(p) = \frac{\frac{1}{C_1 p} \left(R + \frac{1}{C_p} \right)}{\frac{1}{C_1 p} + R + \frac{1}{C_p}} = \frac{RCp + 1}{(C_1 + C + RC_1 C_p)p} \Rightarrow S(p) = \left(1 + \frac{RCp + 1}{R_1 p (C_1 + C + RC_1 C_p)}\right) E(p) \text{ d'où, finalement,}$$

$$T(p) = \frac{RR_1 CC_1 p^2 + (RC + R_1 C + R_1 C_1)p + 1}{p[RR_1 CC_1 p + R_1(C + C_1)]}$$

2)a) Expression numérique

$$\begin{cases} RR_1 CC_1 = 10^6 \cdot 367 \cdot 10^3 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6} \cdot 0,389 \cdot 10^{-6} = 0,0999 \cong 0,1 \\ RC + R_1 C + R_1 C_1 = 10^6 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6} + 367 \cdot 10^3 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6} + 367 \cdot 10^3 \cdot 0,389 \cdot 10^{-6} = 1,0997 \cong 1,1 \Rightarrow \\ R_1(C + C_1) = 367 \cdot 10^3 (0,7 \cdot 10^{-6} + 0,389 \cdot 10^{-6}) = 0,3997 \cong 0,4 \end{cases}$$

$$T(p) = \frac{0,1p^2 + 1,1p + 1}{p(0,1p + 0,4)} = \frac{p^2 + 11p + 10}{p(p + 4)} \text{ or } p^2 + 11p + 10 = (p + 1)(p + 10) \text{ d'où } T(p) = \frac{(p + 1)(p + 10)}{p(p + 4)}$$

b) Expression de s(t)

$$S(p) = T(p) \cdot E(p) \text{ avec } E(p) = 1/p \Rightarrow S(p) = \frac{(p + 1)(p + 10)}{p^2(p + 4)} = \frac{5}{2} \frac{1}{p^2} + \frac{17}{8} \frac{1}{p} - \frac{9}{8} \frac{1}{p + 4} \text{ d'où}$$

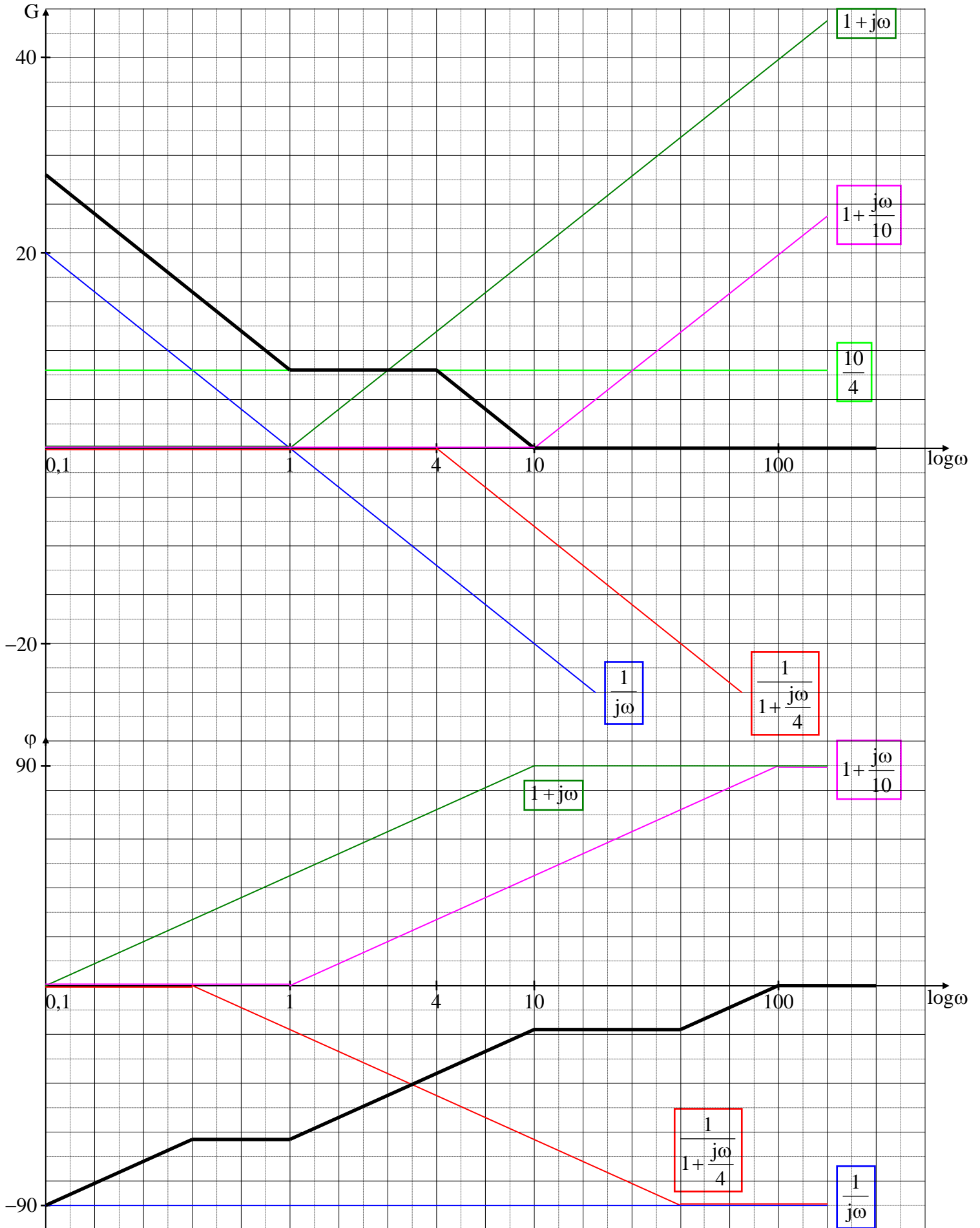
$$s(t) = \frac{5}{2}t + \frac{17}{8} - \frac{9}{8}e^{-4t}$$

c) Diagrammes

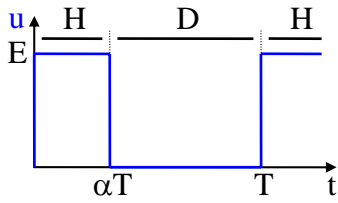
$$\underline{T}(j\omega) = T(p) \text{ pour } p = j\omega \Rightarrow \underline{T}(j\omega) = \frac{(1 + j\omega)(10 + j\omega)}{j\omega(4 + j\omega)} = \frac{10}{4} \frac{(1 + j\omega)\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)}{j\omega\left(1 + \frac{j\omega}{4}\right)}$$

Les diagrammes sont représentés page suivante. Pour la plupart des justifications, on se reportera aux exercices précédents. Signalons simplement ici les points suivants:

- $20\log(10/4) \cong 8\text{dB}$.
- La pulsation 4 a pour abscisse $5\log 4 \cong 3\text{cm}$ à partir de la pulsation 1.
- Le terme $1/j\omega$ donne un gain uniformément décroissant à -20dB/décade et un argument de -90° .
- On peut retrouver directement les valeurs limites lorsque ω tend vers l'infini. En effet, la transmittance tend alors vers 1, ce qui correspond à $G = 0$ et à $\varphi = 0$.



1) Allure de $u(t)$ – Expression de U_C



$u = E$ lorsque H est passant et $u = 0$ lorsque D conduit. Comme le courant est ininterrompu, la conduction de D dure pendant tout l'intervalle $[\alpha T; T]$, l'allure de u est donc celle représentée ci-contre.

$$U_C = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} E dt = \frac{E\alpha T}{T} \Rightarrow \boxed{U_C = \alpha E}$$

Relation liant E , E' et α

La valeur moyenne de la tension aux bornes d'une inductance étant nulle, on a $U_C = E'$, d'où $\boxed{E' = \alpha E}$

2) Expression de i et de I_1

Dans tous les cas $u = L \frac{di}{dt} + E'$. Entre 0 et αT , $u = E$. D'autre part, $E' = \alpha E$. Il vient donc $\frac{di}{dt} = \frac{E - \alpha E}{L}$ dont on

déduit $i = \frac{E(1 - \alpha)}{L} t + A$. La constante d'intégration A se détermine à partir de la condition initiale $i(0) = I_0$. On

obtient sans difficulté $A = I_0$, d'où

$$\boxed{i = \frac{E(1 - \alpha)}{L} t + I_0}$$

$I_1 = i(\alpha T) \Rightarrow$

$$\boxed{I_1 = \frac{E(1 - \alpha)}{L} \alpha T + I_0}$$

3) Nouvelle expression de i

On a maintenant $u = 0$. La même démarche que ci-dessus conduit à $i = \frac{-\alpha E}{L} t + B$, où B se déduit de la condi-

tion de continuité $i(\alpha T) = I_1$, soit $\frac{-\alpha E}{L} \alpha T + B = \frac{E(1 - \alpha)}{L} \alpha T + I_0$, ce qui donne $B = \frac{\alpha E}{L} T + I_0$. Il vient donc

finalement

$$\boxed{i = -\frac{\alpha E}{L} t + \frac{\alpha E}{L} T + I_0}$$

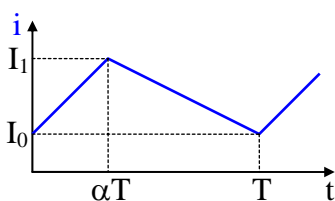
Valeur de $i(T)$

$$i(T) = -\frac{\alpha E}{L} T + \frac{\alpha E}{L} T + I_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{i(T) = I_0}$$

En fait, ceci est obligé, car en régime permanent toutes les grandeurs sont périodiques, de période T . Il est cependant utile de faire cette vérification car elle permet de contrôler que les calculs sont justes (voir également à ce propos la remarque à la fin de la prochaine question).

4) Allure de i – Expression de I_C



Vu ce qui précède, l'évolution de i est linéaire, croissante entre 0 et αT et décroissante ensuite, d'où son allure, représentée ci-contre. Pour déterminer l'expression de sa valeur moyenne, il est plus rapide ici de raisonner en termes d'aire comprise entre i et l'axe des abscisses, rapportée à la période T . En notant S cette aire, on a

$$S = T I_0 + T \frac{I_1 - I_0}{2} = T \frac{I_0 + I_1}{2}, \text{ d'où } \boxed{I_C = \frac{I_0 + I_1}{2}}$$

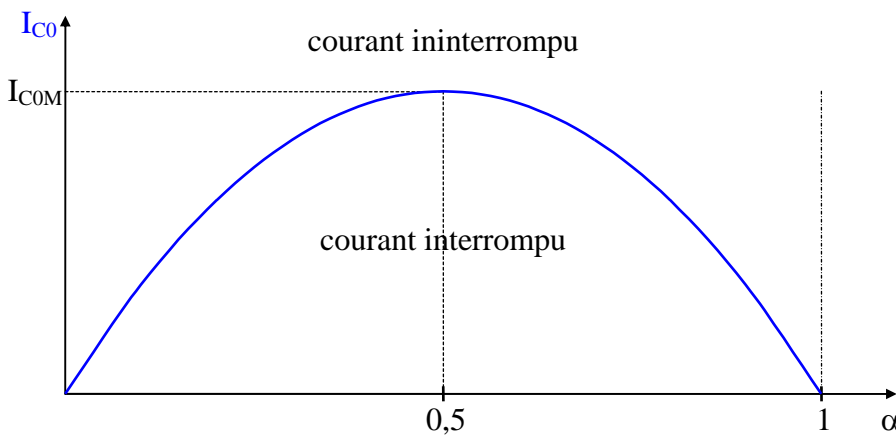
Remarque: A priori, I_0 et I_1 ne sont pas connus. Dans une étude plus complète, tenant compte en particulier des éléments résistifs du circuit, on utilise la condition $i(T) = I_0$ pour déterminer ces termes. Lorsque, comme c'est

souvent le cas dans les exercices de ce genre, on néglige les résistances, il faut se fixer une condition supplémentaire pour résoudre totalement le problème. Très souvent, celle-ci porte sur I_C , en admettant implicitement que cette dernière est imposée de façon externe, ce qui est le cas, par exemple, si la charge (caractérisée ici par la seule f.é.m. E') est une machine à courant continu, pour laquelle la valeur moyenne du courant est forcée par le couple moteur à fournir. Ceci permet, ensuite, de déduire I_0 et I_1 des deux relations $I_1 = \frac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T + I_0$ et $I_C = \frac{I_0 + I_1}{2}$ (Cf. par exemple les exercices 20 et 23).

5)a) Expression de I_{C0}

I_0 étant nul, on a $I_{C0} = I_1/2$, soit, compte tenu de l'expression de I_1 (et toujours de $I_0 = 0$), $I_{C0} = \frac{E(1-\alpha)\alpha T}{2L}$

b) Tracé de la courbe $I_{C0}(\alpha)$



Vu l'expression de I_{C0} , il s'agit d'une portion de parabole passant par les points $[0;0]$ et $[1;0]$. Le maximum est donc forcément au milieu (ce qu'on pourrait aussi retrouver par un calcul classique de dérivée), d'où ses coordonnées:

$$\alpha = 0,5 \quad I_{COM} = \frac{ET}{8L}$$

c) Zone de fonctionnement en courant ininterrompu

La courbe $I_{C0}(\alpha)$ est la limite entre les deux modes de fonctionnement. Pour trouver quelle est la bonne zone, on peut se contenter du raisonnement intuitif suivant: l'effet de lissage étant d'autant plus important que le courant est plus élevé; pour une valeur donnée de α , c'est donc pour I_C supérieur à I_{C0} que le montage fonctionnera en courant ininterrompu (Cf. annotation sur le tracé).

1) Expression de i et de I_1

Dans tous les cas $E = L \frac{di}{dt} + v_H$. Entre 0 et αT , $v_H = 0$. Il vient donc $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$ dont on déduit $i = \frac{E}{L}t + A$, soit,

compte tenu de la condition initiale $i(0) = I_0$,

$$i = \frac{E}{L}t + I_0$$

$I_1 = i(\alpha T) \Rightarrow$

$$I_1 = \frac{E}{L}\alpha T + I_0$$

2) Nouvelle expression de i

Tant que D conduit, $v_H = V$. La même démarche que ci-dessus conduit à $i = \frac{E-V}{L}t + B$, où B se déduit de la condition de continuité $i(\alpha T) = I_1$, soit $\frac{E-V}{L}\alpha T + B = \frac{E}{L}\alpha T + I_0$, ce qui donne $B = \frac{V}{L}\alpha T + I_0$. Il vient donc

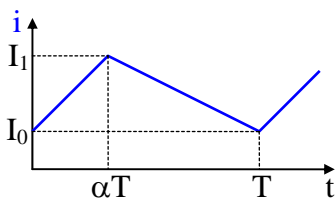
finalement

$$i = \frac{E-V}{L}t + \frac{V}{L}\alpha T + I_0$$

3)a) Relation entre V , E et α

$i(T) = I_0 \Rightarrow \frac{E-V}{L}T + \frac{V}{L}\alpha T + I_0 = I_0$ soit $E - V + V\alpha = 0$ qu'on peut écrire sous la forme $V = \frac{E}{1-\alpha}$

b) Allure de i – Expression de I_C



i croît linéairement entre 0 et αT . Pour que ce courant puisse redescendre à I_0 au temps T , il faut obligatoirement qu'il décroisse sur l'intervalle $[\alpha T; T]$ (donc que V soit supérieur à E , ce que confirme bien le résultat obtenu à la question précédente). Le courant présente donc l'allure ci-contre. Cf. calcul identique fait dans

l'exercice 19, on en déduit $I_C = \frac{I_0 + I_1}{2}$

c) Expression de Δi

Cf. question 1), $I_1 = \frac{E}{L}\alpha T + I_0$ On en déduit $I_1 - I_0 = \frac{E}{L}\alpha T$ soit $\Delta i = \frac{E}{L}\alpha T$

d) Expressions de I_0 et de I_1

Ces deux termes sont solutions du système $\begin{cases} I_1 - I_0 = \Delta i \\ \frac{I_0 + I_1}{2} = I_C \end{cases}$ qui se résout sans difficulté pour donner

$$I_0 = I_C - \frac{\Delta i}{2} \quad I_1 = I_C + \frac{\Delta i}{2}$$

N.B.: On pourrait aussi raisonner graphiquement, à partir de l'allure de i . I_C étant la demi-somme des extrémités I_0 et I_1 , et l'amplitude crête à crête de i étant, par définition, égale à Δi , il vient immédiatement $I_0 = I_C - \frac{\Delta i}{2}$ et

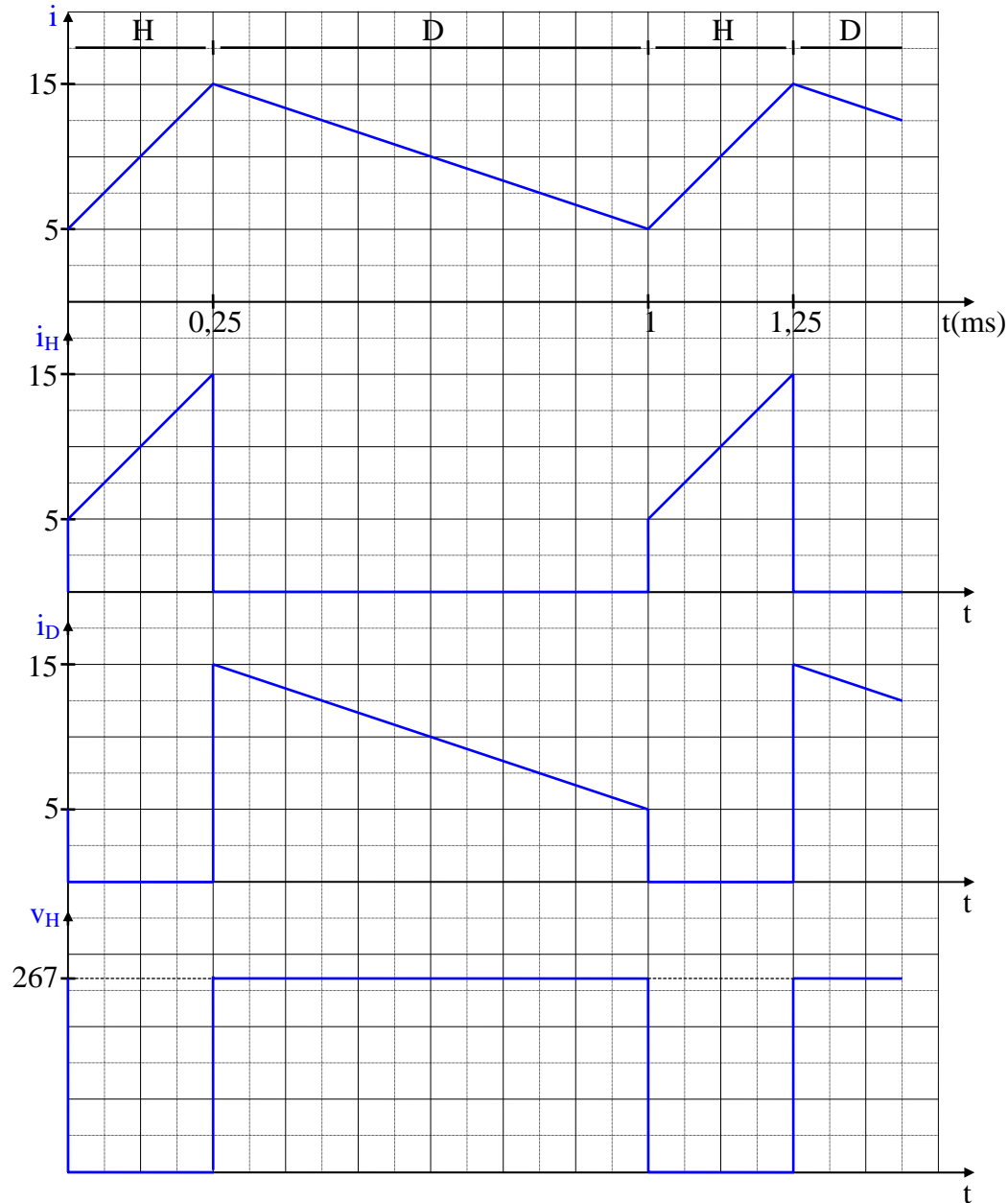
$I_1 = I_C + \frac{\Delta i}{2}$.

e) Calcul de I_0 , I_1 et V

$$\Delta i = \frac{200}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} = 10A \Rightarrow I_0 = 10 - 10/2 \text{ soit } \boxed{I_0 = 5A} \quad I_1 = 10 + 10/2 \text{ soit } \boxed{I_1 = 15A}$$

$$V = \frac{200}{1 - 0,25} \text{ soit } \boxed{V = 267V}$$

Tracés des différentes grandeurs



$i_H = i$ quand H conduit et 0 sinon.

$i_D = i$ quand D conduit et 0 sinon.

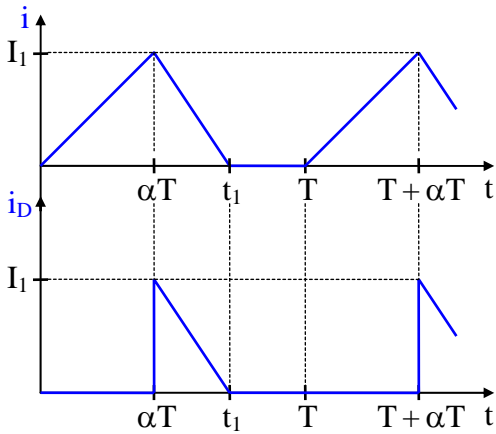
$v_H = 0$ quand H conduit et V sinon.

4)a) Relation liant t_1 , E , V , α et T

Avec $I_0 = 0$, l'expression obtenue au 2) s'écrit $i = \frac{E - V}{L}t + \frac{V}{L}\alpha T$. L'instant t_1 étant défini par $i(t_1) = 0$, il vient

$$0 = \frac{E - V}{L}t_1 + \frac{V}{L}\alpha T, \text{ soit } t_1 = \frac{V}{V - E}\alpha T, \text{ d'où on déduit } \boxed{V = \frac{Et_1}{t_1 - \alpha T}}$$

b) Allures de i et de i_D – Relations entre les grandeurs



Compte tenu du fait que $i = 0$ entre t_1 et T , le tracé s'établit comme indiqué ci-contre.

I_{DC} s'obtient en raisonnant à nouveau en termes d'aire ramenée à la période:

$$S = (t_1 - \alpha T) \frac{I_1}{2} \quad \text{avec} \quad I_1 = \frac{E}{L} \alpha T \Rightarrow I_{DC} = \frac{1}{T} (t_1 - \alpha T) \frac{E}{2L} \alpha T$$

soit

$$I_{DC} = (t_1 - \alpha T) \frac{\alpha E}{2L}$$

d'où on déduit

$$t_1 = \alpha T + \frac{2LI_{DC}}{\alpha E}$$

e) Expression de V

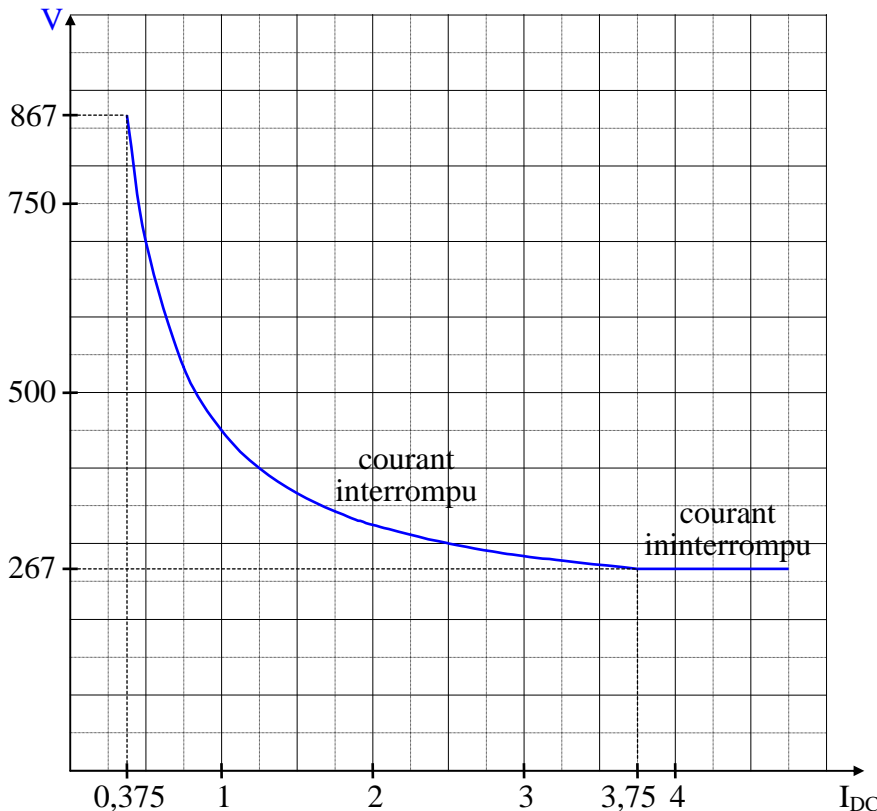
$$V = \frac{Et_1}{t_1 - \alpha T} \quad t_1 = \alpha T + \frac{2LI_{DC}}{\alpha E} \Rightarrow V = \frac{E(\alpha T + 2LI_{DC}/\alpha E)}{2LI_{DC}/\alpha E} \quad \text{soit} \quad V = E \left(1 + \frac{\alpha^2 TE}{2LI_{DC}} \right)$$

Application

Le courant reste interrompu tant que t_1 est inférieur à T . I_{DCM} correspond donc à la valeur de I_{DC} pour laquelle t_1 est égal à T . On a donc $I_{DCM} = (T - \alpha T) \frac{\alpha E}{L} = (10^{-3} - 0,25 \cdot 10^{-3}) \frac{0,25 \cdot 200}{5 \cdot 10^{-3}}$ soit $I_{DCM} = 3,75A$

Numériquement, $V = 200 \left(1 + \frac{0,25^2 \cdot 10^{-3} \cdot 200}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} I_{DC}} \right) = 200 \left(1 + \frac{1,25}{I_{DC}} \right)$. Pour $I_{DC} = I_{DCM}$, on retrouve bien évidemment

la valeur 267V obtenue lors de l'étude en courant ininterrompu, V restant constant et égal à cette valeur pour $I_{DC} \geq I_{DCM}$. La courbe correspondante est représentée ci-dessous.



1) a) Expressions de u_L

$$\boxed{\text{H conduit: } u_L = E \quad \text{D conduit: } u_L = -V_C}$$

b) Expression de V_C

$$U_{LC} = 0 \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} E dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T -V_C dt = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{E}{T} \alpha T - \frac{V_C}{T} (T - \alpha T) = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_C = \frac{\alpha}{1-\alpha} E}$$

2) a) Expression de i_L et de I_1

Dans tous les cas $u_L = L \frac{di_L}{dt}$. Entre 0 et αT , $u_L = E$. Il vient donc $\frac{di_L}{dt} = \frac{E}{L}$ dont on déduit $i_L = \frac{E}{L} t + A$. Or ce

courant est interrompu, ce qui veut dire qu'il s'annule et reste nul pendant un certain temps à l'intérieur d'une période. Comme i_L est croissant entre 0 et αT (sa dérivée étant positive), son annulation ne peut se produire qu'entre αT et T . Comme i_L est forcément décroissant sur cet intervalle, on aura en particulier $i_L(T) = 0$, donc $i_L(0) = 0$, vu sa périodicité. On en déduit que $A = 0$ et que

$$\boxed{i_L = \frac{E}{L} t}$$

$$I_1 = i_L(\alpha T) \Rightarrow$$

$$\boxed{I_1 = \frac{E}{L} \alpha T}$$

b) Nouvelle expression de i_L

On a maintenant $u_L = -V_C$. La même démarche que ci-dessus conduit à $i_L = \frac{-V_C}{L} t + B$, où B se déduit de la condition de continuité $i_L(\alpha T) = I_1$, soit $\frac{-V_C}{L} \alpha T + B = \frac{E}{L} \alpha T$, ce qui donne $B = \frac{E}{L} \alpha T + \frac{V_C}{L} \alpha T$. Il vient donc

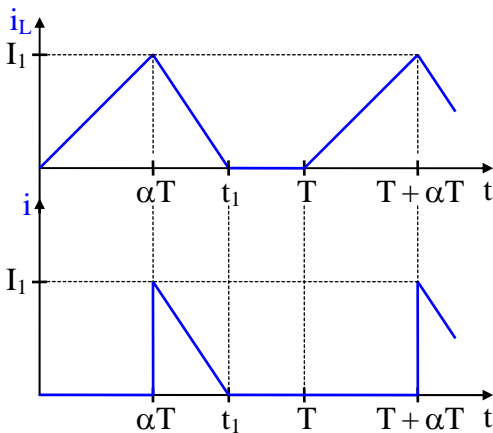
finalement

$$\boxed{i_L = -\frac{V_C}{L} t + \frac{E + V_C}{L} \alpha T}$$

Expression de V_C

$$i_L(t_1) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{V_C}{L} t_1 + \frac{E + V_C}{L} \alpha T \quad \text{d'où on déduit} \quad \boxed{V_C = \frac{\alpha T}{t_1 - \alpha T} E}$$

c) Allure de i – Expression de I_C



$i = i_L$ quand D conduit et 0 sinon. Les allures de i_L et de i sont représentées ci-contre (rappel: $I_1 = \frac{E}{L} \alpha T$).

Pour obtenir I_C , on raisonne comme habituellement en termes d'aire rapportée à la période:

$$S = (t_1 - \alpha T) \frac{I_1}{2} = (t_1 - \alpha T) \frac{E}{2L} \alpha T, \quad \text{d'où} \quad \boxed{I_C = (t_1 - \alpha T) \frac{\alpha E}{2L}}$$

d) Nouvelle expression de I_C

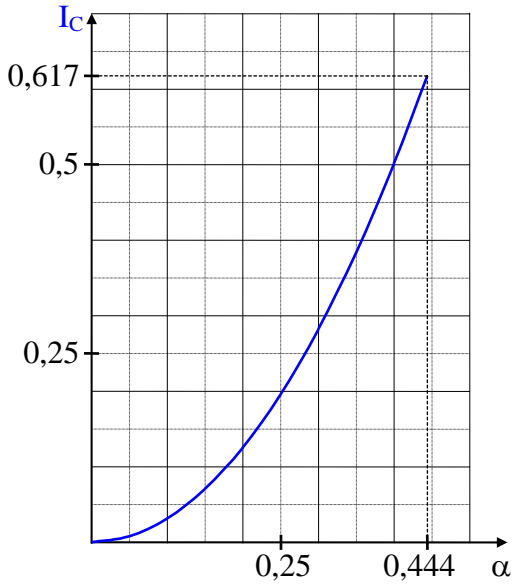
$$V_C = \frac{\alpha T}{t_1 - \alpha T} E \Rightarrow t_1 - \alpha T = \alpha T \frac{E}{V_C} \quad \text{ce qui, reporté dans l'expression de } I_C \text{ donne} \quad \boxed{I_C = \frac{E^2 T}{2L V_C} \alpha^2}$$

Calcul de α_M

La limite du courant interrompu est telle que $t_1 = T$. Dans ce cas, $V_C = \frac{\alpha T}{T - \alpha T} E = \frac{\alpha}{1 - \alpha} E$. On en déduit

$$\frac{\alpha_M}{1 - \alpha_M} = \frac{V_C}{E} \quad \text{soit} \quad \alpha_M = \frac{V_C}{E + V_C} = \frac{8}{10 + 8} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\alpha_M = 0,444}$$

Tracé de la courbe



Numériquement, $I_C = \frac{10^2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 8} \alpha^2 = 3,13 \alpha^2$. Il s'agit donc d'une portion de parabole (Cf. ci-contre – $I_C(\alpha_M) = 0,617 \text{ A}$).

N.B.: Cette courbe est tracée dans l'optique d'un débit sur f.c.é.m. On peut aussi envisager le cas d'une régulation de la tension V_C . Dans cette hypothèse, il faudrait plutôt tracer la courbe $\alpha = f(I_C)$, qui jouerait alors le rôle de caractéristique de réglage.

1) Valeurs de v_1 et de i_2 – Expression de i_1

H passant \Rightarrow $v_1 = E$

Vu le sens des enroulements du transformateur, v_2 est négatif, donc la tension anode-cathode $v_2 - V$ aux bornes de D est également négative. De ce fait, la diode D est bloquée, ce qui entraîne $i_2 = 0$

Ceci, reporté dans la première équation du transformateur donne $E = L_1 \frac{di_1}{dt}$, dont on déduit $i_1 = \frac{E}{L_1} t + A$

2) Valeurs de v_2 et de i_1 – Expression de i_2

D conduit \Rightarrow $v_2 = V$

H fonctionnant en commutation forcée, cet interrupteur est bloqué entre αT et T , d'où $i_1 = 0$

De même, ceci, reporté dans la deuxième équation du transformateur donne $V = -L_2 \frac{di_2}{dt}$, dont on déduit

$$i_2 = -\frac{V}{L_2} t + B$$

3a) Valeurs de $i_1(0)$ et de A – Expression de I_1

Vu le fonctionnement en démagnétisation complète, tous les courants sont nuls juste avant l'amorçage de H. On a donc $R\phi = N_1 \cdot 0 + N_2 \cdot 0 = 0$, d'où $\phi = 0$. Juste après amorçage, i_2 reste évidemment nul. Par conséquent, à cet instant, on aura $R\phi = N_1 \cdot i_1(0)$. Or, la conservation du flux implique que ϕ reste nul. Il vient donc $i_1(0) = 0$

Ceci, reporté dans l'expression de i_1 obtenu au 1) entraîne $A = 0$

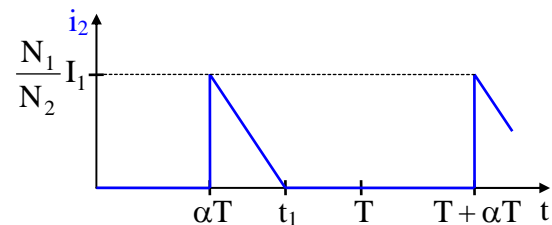
De ce fait, on a $i_1 = \frac{E}{L_1} t$, d'où $I_1 = \frac{E}{L_1} \alpha T$

b) Expression de $i_2(\alpha T)$

Juste avant le blocage de H, $R\phi = N_1 \cdot I_1$, juste après, $R\phi = N_2 \cdot i_2(\alpha T)$. ϕ se conservant, il vient $N_1 \cdot I_1 = N_2 \cdot i_2(\alpha T)$,

soit $i_2(\alpha T) = \frac{N_1}{N_2} I_1$

Allure de i_2 – Expression de I_{2C}



i_2 décroît linéairement entre $i_2(\alpha T)$ et 0 sur l'intervalle $[\alpha T; t_1]$ et vaut 0 sur le reste de la période. Son allure est donc celle représentée ci-contre. Toujours en raisonnant en termes de surface, on

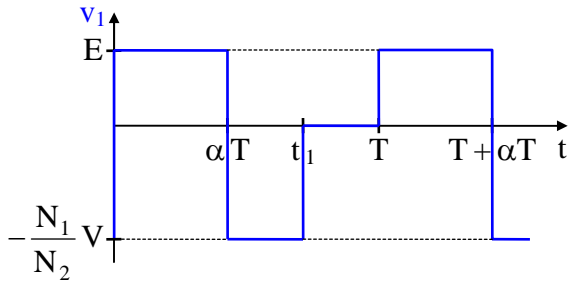
a $I_{2C} = (t_1 - \alpha T) \frac{N_1}{N_2} \frac{I_1}{2} / T$, soit $I_{2C} = \frac{t_1 - \alpha T}{2T} \frac{N_1}{N_2} I_1$

c) Expression de v_1

$i_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$ d'où $v_1 = M \left(-\frac{v_2}{L_2} \right) = -\frac{M}{L_2} v_2$ or $\frac{M}{L_2} = \frac{M}{L_1 L_2} = \frac{N_2}{N_1} \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 = \frac{N_1}{N_2}$

D'autre part, $v_2 = V$. Il vient donc finalement $v_1 = -\frac{N_1}{N_2} V$

Allure de v_1 – Expression de $t_1 - \alpha T$



Vu les expressions obtenues précédemment pour v_1 et le fait que $v_1 = 0$ entre t_1 et T , son allure est celle représentée ci-contre.

$$V_{1C} = 0 \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} E dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^{t_1} -\frac{N_1}{N_2} V dt = 0 \quad \text{soit}$$

$$\frac{E}{T} \alpha T - \frac{1}{T} \frac{N_1}{N_2} V (t_1 - \alpha T) = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{t_1 - \alpha T = \frac{N_2}{N_1} \frac{E \alpha T}{V}}$$

d) Expression de I_{2C}

$$\begin{cases} I_{2C} = \frac{t_1 - \alpha T}{2T} \frac{N_1}{N_2} I_1 \\ t_1 - \alpha T = \frac{N_2}{N_1} \frac{E \alpha T}{V} \end{cases} \Rightarrow I_{2C} = \frac{N_2}{N_1} \frac{E \alpha T}{2TV} \frac{N_1}{N_2} I_1 \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{2C} = \frac{E \alpha}{2V} I_1}$$

Or, $I_1 = \frac{E}{L_1} \alpha T$. On a donc finalement

$$\boxed{I_{2C} = \frac{E^2 T}{2V L_1} \alpha^2}$$

e) Calcul de t_1 – Tracé des courbes

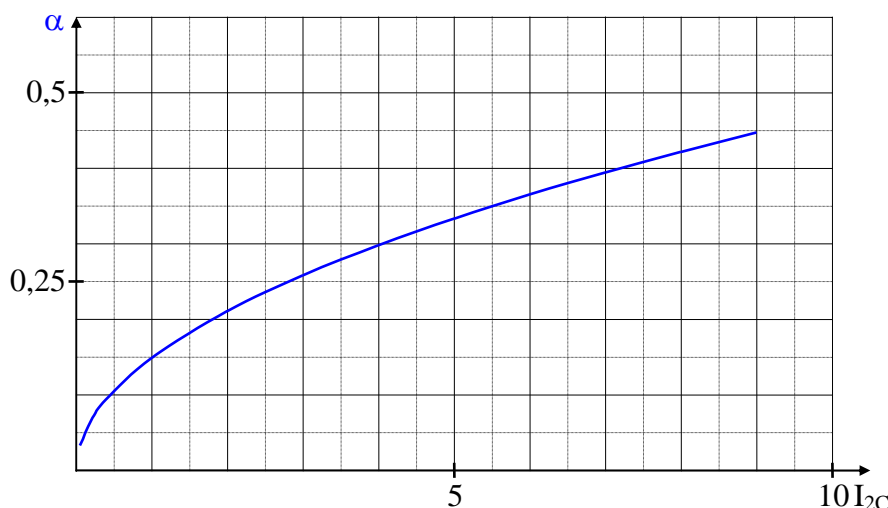
$$t_1 = \alpha T + \frac{N_2}{N_1} \frac{E \alpha T}{V} = 0,45 \cdot 10^{-5} + \frac{1}{60} \frac{300 \cdot 0,45 \cdot 10^{-5}}{5} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_1 = 9 \mu s}$$

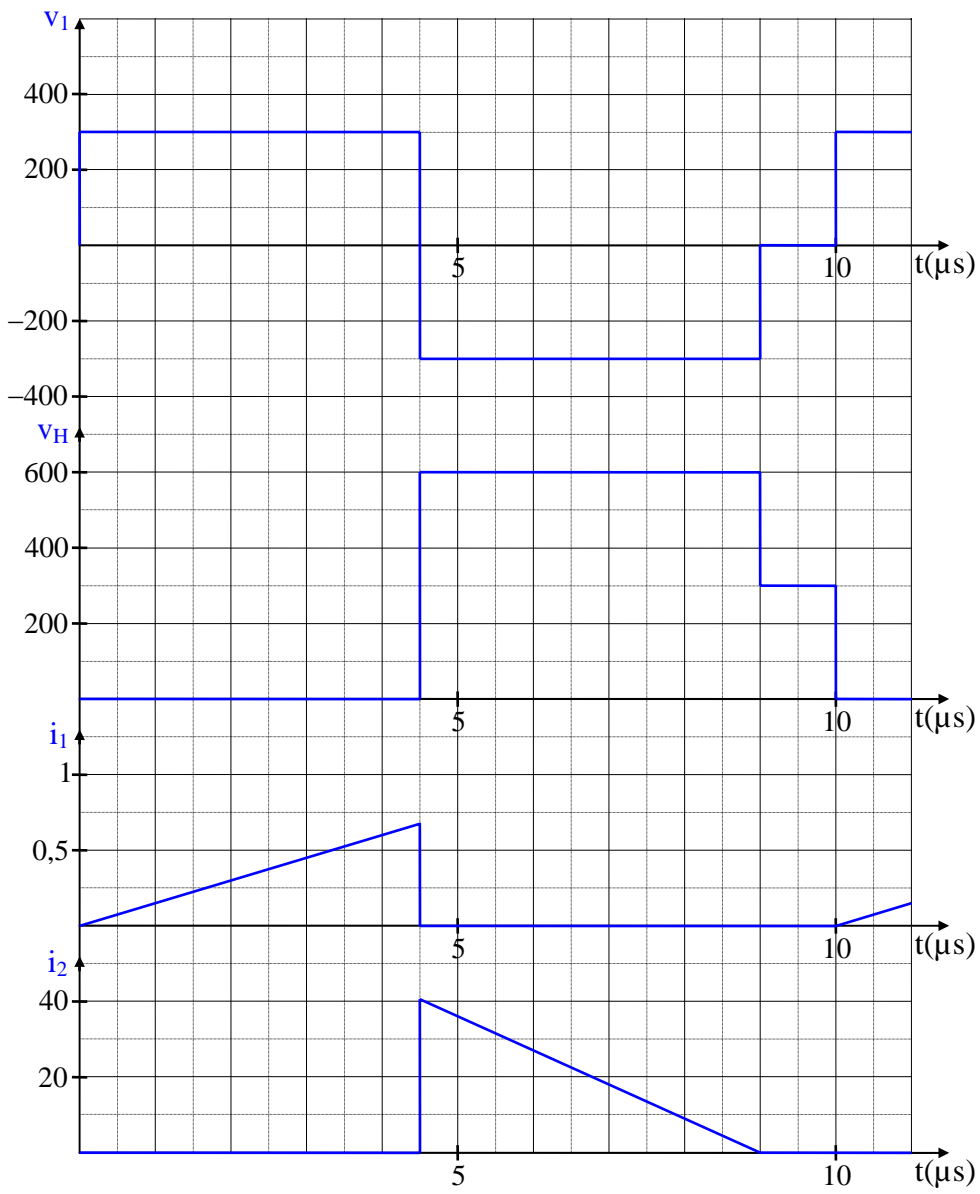
Les tracés sont représentés page suivante, compte tenu des éléments suivants:

- $\frac{N_1}{N_2} V = 60 \cdot 5 = 300V$
- $v_H = 0$ quand H conduit, $v_H = E - v_1 = 300 - (-300) = 600V$ quand D conduit et $v_H = E = 300V$ quand D est bloquée.
- $I_1 = \frac{300}{2 \cdot 10^{-3}} 0,45 \cdot 10^{-5} = 0,675A$ $i_2(\alpha T) = 60 \cdot 0,675 = 40,5A$

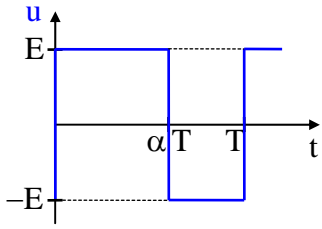
Caractéristique de réglage

Cf. d), $\alpha = \sqrt{\frac{2V L_1}{E^2 T}} \sqrt{I_{2C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{300^2 \cdot 10^{-5}}} \sqrt{I_{2C}} = 0,149 \sqrt{I_{2C}}$. La courbe est représentée ci-dessous.





1) Allure de $u(t)$ – Expression de U_C



$u = E$ entre 0 et αT et $u = -E$ entre αT et T , ce qui conduit à l'allure représentée ci-contre.

$$U_C = \frac{1}{T} \left[\int_0^{\alpha T} E dt + \int_{\alpha T}^T -E dt \right] = \frac{E\alpha T - E(T - \alpha T)}{T} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_C = (2\alpha - 1)E}$$

Expression de E'

La valeur moyenne de la tension aux bornes de L étant nulle, on a $U_C = E'$, d'où $\boxed{E' = (2\alpha - 1)E}$

2) Expression de i , I_1 et Δi

Dans tous les cas, $u = L \frac{di}{dt} + E' = L \frac{di}{dt} + (2\alpha - 1)E$. Entre 0 et αT , $u = E$. Il vient donc $\frac{di}{dt} = \frac{E - (2\alpha - 1)E}{L}$ dont

on déduit $i = \frac{2(1 - \alpha)E}{L} t + A$. La constante d'intégration A se détermine à partir de la condition initiale $i(0) = I_0$.

On obtient sans difficulté $A = I_0$, d'où
$$\boxed{i = \frac{2(1 - \alpha)E}{L} t + I_0}$$

$$I_1 = i(\alpha T) \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{2(1 - \alpha)E}{L} \alpha T + I_0} \quad \Delta i = I_1 - I_0 \Rightarrow \boxed{\Delta i = \frac{2(1 - \alpha)E}{L} \alpha T}$$

3) Nouvelle expression de i – Vérification

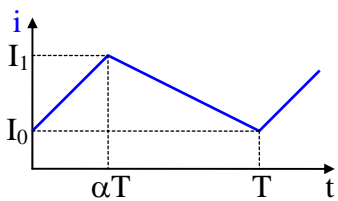
On a maintenant $u = -E$. La même démarche que ci-dessus conduit à $i = \frac{-2\alpha E}{L} t + B$, où B se déduit de la con-

dition de continuité $i(\alpha T) = I_1$, soit $\frac{-2\alpha E}{L} \alpha T + B = \frac{2(1 - \alpha)E}{L} \alpha T + I_0$, ce qui donne $B = \frac{2E}{L} \alpha T + I_0$. Il vient

donc finalement
$$\boxed{i = -\frac{2\alpha E}{L} t + \frac{2\alpha E}{L} T + I_0}$$

$$i(T) = -\frac{2\alpha E}{L} T + \frac{2\alpha E}{L} T + I_0 \Rightarrow \boxed{i(T) = I_0}$$

4) Allure de i – Expression de I_C



Vu ce qui précède, i croît linéairement de I_0 à I_1 sur l'intervalle $[0; \alpha T]$ et décroît linéairement de I_1 à I_0 sur l'intervalle $[\alpha T; T]$. En supposant I_0 et I_1 positifs, son allure est donc celle représentée ci-contre. Toujours en raisonnant en termes d'aire

rapportée à la période, on a $S = T I_0 + T \frac{I_1 - I_0}{2} = T \frac{I_0 + I_1}{2}$, d'où $\boxed{I_C = \frac{I_0 + I_1}{2}}$

5) Expressions de I_0 et de I_1

De
$$\begin{cases} I_1 - I_0 = \Delta i \\ \frac{I_0 + I_1}{2} = I_C \end{cases} \quad \text{on déduit sans difficulté} \quad \boxed{I_0 = I_C - \frac{\Delta i}{2} \quad I_1 = I_C + \frac{\Delta i}{2}}$$

Application

$$\Delta i = \frac{2(1-0,8)200}{16 \cdot 10^{-3}} 0,8 \cdot 10^{-3} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta i = 4A}$$

a) Valeurs de I_0 et de I_1 – Tracés des courbes

$I_0 = I_C - 4/2 = I_C - 2$ $I_1 = I_C + 4/2 = I_C + 2$ Les valeurs sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

$I_C(A)$	10	0	-10
$I_0(A)$	8	-2	-12
$I_1(A)$	12	2	-8

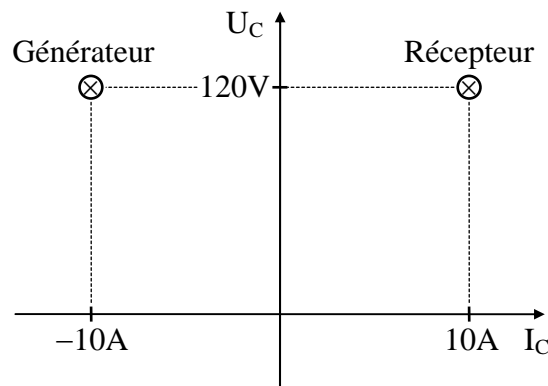
Les allures pour chacun des trois cas sont représentées page suivante. En ce qui concerne les intervalles de conduction, le raisonnement est le suivant:

- Entre 0 et αT , H_1 est commandé à l'état passant. H_1 conduit si i est positif, D_1 conduit si i est négatif.
- Entre αT et T , H_2 est commandé à l'état passant. H_2 conduit si i est négatif, D_2 conduit si i est positif.

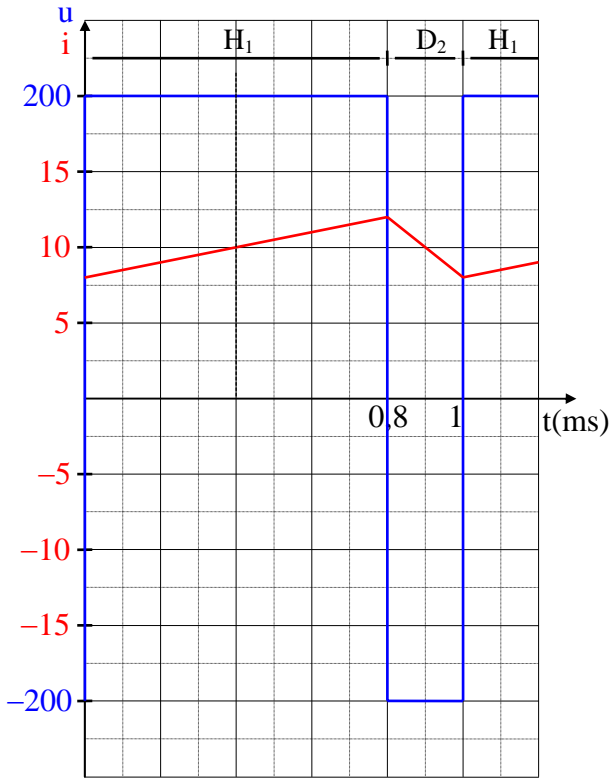
On peut noter que, si on raisonne en terme d'interrupteur "global" [H;D], celui-ci est fermé lorsque H est commandé à l'état passant et ouvert sinon. Cet interrupteur est bidirectionnel vis à vis de la conduction mais pas du blocage. En effet, seul le courant dont le sens correspond à la conduction de H peut être coupé par la commande, la diode, elle, fonctionnant en commutation naturelle.

b) Points de fonctionnement – Mode de marche

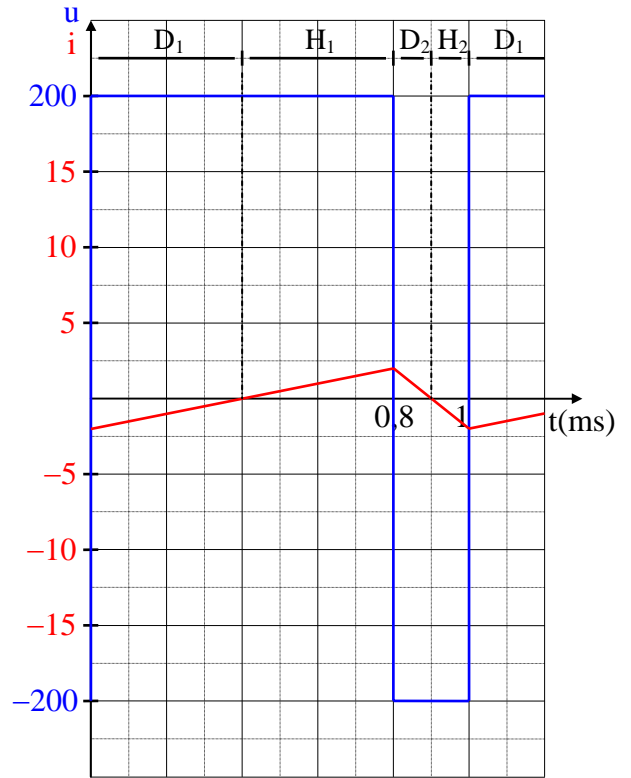
$U_C = (2 \cdot 0,8 - 1)200 = 120V$. Le circuit de charge fonctionne en récepteur lorsque le produit $U_C \cdot I_C$ est positif et en générateur si ce produit est négatif (Cf. ci-dessous).



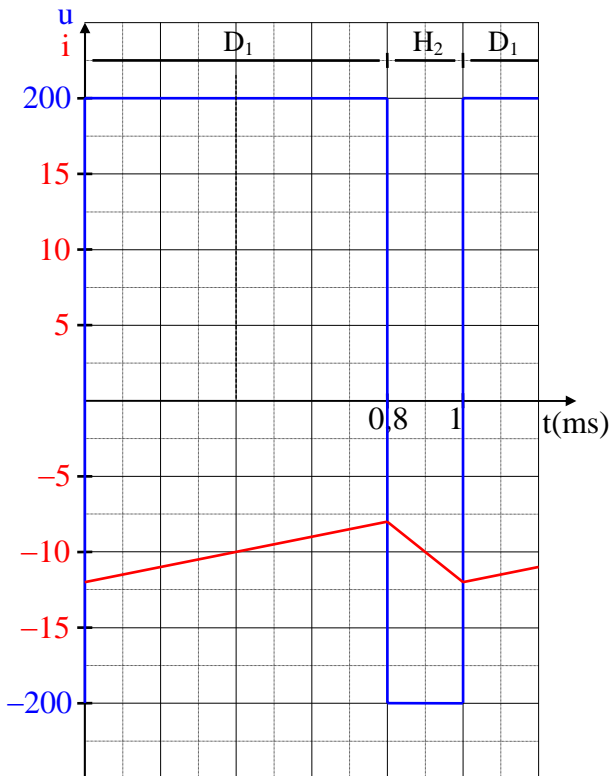
$I_C = 10A$



$I_C = 0$



$I_C = -10A$



1) Relation liant C à $K\Phi$ et I_C

$$\begin{cases} P = C\Omega = E_0 I_C \\ E_0 = K\Phi n \\ \Omega = \frac{\pi n}{30} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{K\Phi n I_C}{\frac{\pi n}{30}} \text{ soit } \boxed{C = \frac{30}{\pi} K\Phi I_C}$$

Application

$K\Phi = \frac{E_0}{n} = \frac{E_0}{1500}$, ce qui conduit au tableau ci-dessous. On laisse au lecteur le soin de tracer la courbe, dont on déduit en particulier que, pour $I_C = 450A$, on a $K\Phi = 0,343V/(tr/min)$.

$I_C(A)$	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$K\Phi(V/(tr/min))$	0,103	0,190	0,267	0,323	0,363	0,393	0,413	0,433	0,450

$$C_N = \frac{30}{\pi} 0,343 \cdot 450 \text{ soit } \boxed{C_N = 1474Nm}$$

$$C_D = \frac{30}{\pi} 0,450 \cdot 900 \text{ soit } \boxed{C_D = 3867Nm}$$

2) Relation liant les grandeurs

$$\begin{cases} U'_C = RI_C + K\Phi n \\ U'_C = U_C \frac{1 + \cos \alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{U_C \frac{1 + \cos \alpha}{2} = RI_C + K\Phi n}$$

Application

$$U_C \frac{1 + \cos \alpha}{2} = RI_C + K\Phi n \Rightarrow \alpha = \arccos \left[\frac{2(RI_C + K\Phi n)}{U_C} - 1 \right] = \arccos \left[\frac{2(0,035I_C + K\Phi n)}{1200} - 1 \right]$$

$C = C_D$ au démarrage Dans ce cas, $n = 0$ (la connaissance de $K\Phi$ est donc inutile). Par ailleurs, $C = C_D$ entraîne $I_C = I_D = 900A$. D'où $\alpha = \arccos \left[\frac{2(0,035 \cdot 900 + 0)}{1200} - 1 \right]$ soit $\boxed{\alpha = 161^\circ}$

$C = C_N$ pour $n = 3000tr/min$ $C = C_N$ entraîne $I_C = I_N = 450A$, donc $K\Phi = 0,343V/(tr/min)$. On en déduit $\alpha = \arccos \left[\frac{2(0,035 \cdot 450 + 0,343 \cdot 3000)}{1200} - 1 \right]$ soit $\boxed{\alpha = 42,2^\circ}$

1) Relation liant U'_C , R , I_C , k et n

La résistance R étant parcourue par le courant I_C , il vient immédiatement $U'_C = RI_C + kn$

2)a) Relation entre les grandeurs

Dans le quadrant 1, c'est P1 qui conduit. D'autre part, comme la valeur moyenne aux bornes de l'inductance L est nulle, on a $U'_C = U'_{1C} = U_C \cos \alpha_1$. Ceci, combiné avec la relation obtenue au 1), donne

$$U_C \cos \alpha_1 = RI_C + kn$$

b) Valeur de α_1

RI_C étant négligeable, on a $U_C \cos \alpha_1 = kn$, d'où on déduit $\alpha_1 = \arccos\left(\frac{kn}{U_C}\right) = \arccos\left(\frac{0,83 \cdot 1500}{1500}\right)$, soit

$$\alpha_1 = 33,9^\circ$$

Vitesse de rotation à pleine charge

De $U_C \cos \alpha_1 = RI_C + kn$, on déduit $n = \frac{U_C \cos \alpha_1 - RI_C}{k} = \frac{U_C \cos \alpha_1}{k} - \frac{RI_C}{k}$. On peut remarquer que le premier terme correspond à la fréquence de rotation à vide, d'où $n = 1500 - \frac{0,022 \cdot 500}{0,83}$, soit $n = 1487 \text{tr/min}$

Puissance fournie par le réseau On la note P_f

P_f est égale à la puissance fournie par le pont P1. Vu la convention générateur employée pour celui-ci, cette puissance vaut $U'_{1C} I_C$. On a donc $P_f = U_C \cos \alpha_1 I_C = 1500 \cdot \cos 33,9 \cdot 500$, soit $P_f = 623 \text{kW}$

3)a) Relation entre les grandeurs

Dans le quadrant 2, c'est P2 qui conduit. La même démarche que précédemment, mais en tenant compte du fait que u_2 est pris en sens inverse de u , conduit à $U'_C = -U'_{2C} = -U_C \cos \alpha_2$, d'où $-U_C \cos \alpha_2 = RI_C + kn$

b) Valeur de α_2

De la relation précédente, on déduit $\alpha_2 = \arccos\left(\frac{RI_C + kn}{-U_C}\right) = \arccos\left(\frac{0,022 \cdot (-1000) + 0,83 \cdot 1500}{-1500}\right)$, soit

$$\alpha_2 = 145^\circ$$

Puissance restituée au réseau On la note P_r

P_r est égale à la puissance absorbée par le pont P2. Vu la convention récepteur employée pour celui-ci, cette puissance vaut $U'_{2C} I_C$. On a donc $P_r = U_C \cos \alpha_2 I_C = 1500 \cdot \cos 145 \cdot (-1000)$, soit $P_r = 1,22 \text{MW}$

4) Calcul de α_2

Dans le quadrant 3, c'est toujours P2 qui conduit. Ceci, combiné au fait que RI_C peut, à nouveau, être négligé, donne $-U_C \cos \alpha_2 = kn$, soit $\alpha_2 = \arccos\left(\frac{kn}{-U_C}\right) = \arccos\left(\frac{0,83 \cdot (-1500)}{-1500}\right)$, d'où $\alpha_2 = 33,9^\circ$

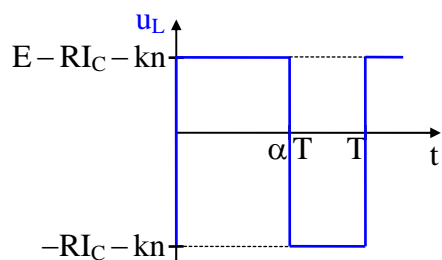
N.B.: Cette valeur est égale à celle obtenue au 1) pour α_1 car, d'une part, au sens de rotation près, il s'agit du même point de fonctionnement mécanique et d'autre part, les deux ponts sont identiques et alimentés par le même réseau.

1) Les différents éléments étant unidirectionnels, leurs possibilités de conduction dépendent du signe du courant instantané. Celui-ci étant supposé parfaitement lissé, il est en permanence égal à sa valeur moyenne, son signe est donc simplement celui de I_C . On en déduit les résultats suivants:

$$\boxed{I_C > 0: H_1 \text{ et } D_2 \text{ conduisent} \quad I_C < 0: H_2 \text{ et } D_1 \text{ conduisent}}$$

N.B.: Ceci ne préjuge en rien des intervalles de conduction effectifs, qui dépendent en plus des moments où les interrupteurs sont commandés à l'état passant.

Allure de u_L – Relation entre les grandeurs



Entre 0 et αT , H_1 est commandé à l'état passant, mais il ne conduit que si I_C est positif, sinon c'est D_1 (Cf. ci-dessus). Dans tous les cas, l'interrupteur "global" [$H_1; D_1$] est fermé, ce qui conduit à $u_L = E - RI_C - kn$. De la même façon, entre αT et T , c'est [$H_2; D_2$] qui est fermé, d'où $u_L = -RI_C - kn$. L'allure de u_L est donc celle représentée ci-contre.

$$U_{LC} = 0 \Rightarrow \frac{1}{T} \left[\int_0^{\alpha T} (E - RI_C - kn) dt + \int_{\alpha T}^T (-RI_C - kn) dt \right] = 0, \text{ soit } \frac{(E - RI_C - kn)\alpha T - (RI_C + kn)(T - \alpha T)}{T} = 0$$

d'où, finalement

$$\boxed{\alpha E = RI_C + kn}$$

2) Expression de k_T – Application numérique

$$\begin{cases} C = \frac{E'I_C}{\Omega} = \frac{knI_C}{\Omega} \\ \Omega = \frac{\pi n}{30} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{knI_C}{\frac{\pi n}{30}} = \frac{30}{\pi} kI_C \quad \text{d'où, par identification avec } C = k_T I_C, \quad \boxed{k_T = \frac{30}{\pi} k}$$

$$\text{A.N.: } k_T = \frac{30}{\pi} \cdot 0,1 \Rightarrow$$

$$\boxed{k_T = 0,955 \text{ Nm/A}}$$

3)a) Relation entre les grandeurs

En régime permanent, le couple moteur est égal au couple résistant, d'où $\boxed{k_T I_C = C_r + f \cdot n^2}$

b) Valeur de I_C

$$\text{On déduit immédiatement de ce qui précède que } I_C = \frac{C_r + f \cdot n^2}{k_T} = \frac{2 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 1500^2}{0,955}, \text{ soit } \boxed{I_C = 13,9 \text{ A}}$$

Valeur de α

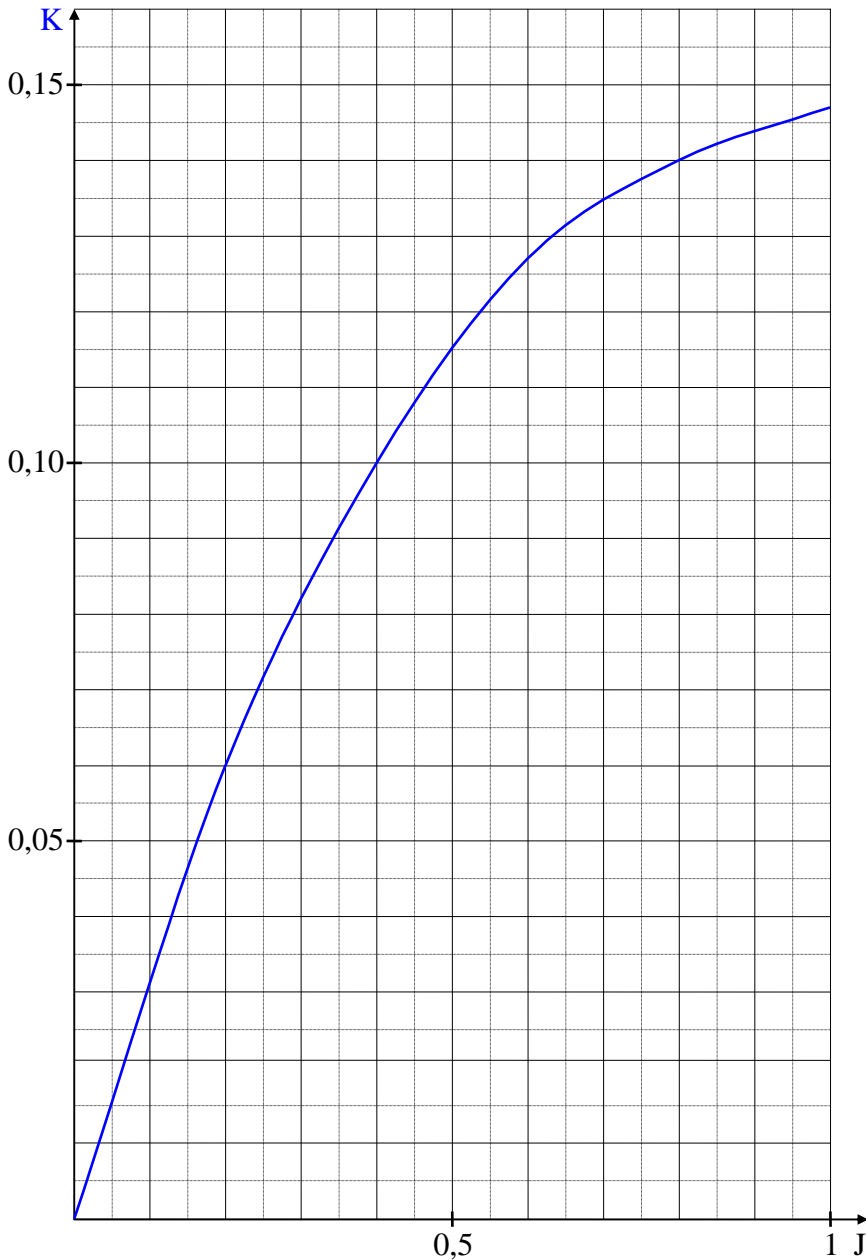
$$\text{Cf. 1), } \alpha = \frac{RI_C + kn}{E} = \frac{0,5 \cdot 13,9 + 0,1 \cdot 1500}{200}, \text{ soit } \boxed{\alpha = 0,785}$$

c) Nouvelles valeurs de I_C et de α

$$I_C = \frac{-15 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2}{0,955} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_C = -14,4 \text{ A}}$$

$$\alpha = \frac{0,5 \cdot (-14,4) + 0,1 \cdot 500}{200} \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha = 0,214}$$

1) Tracé de la courbe $K=f(J)$



$K = \frac{E_0}{n} = \frac{E_0}{1500}$. Les valeurs sont regroupées dans le tableau ci-dessous et la courbe est représentée ci-contre.

J(A)	K(V·min/tr)
0	0
0,2	0,060
0,4	0,100
0,6	0,127
0,8	0,140
1	0,147

2) Equation du couple moteur

$$\begin{cases} C\Omega = E'I = KnI \\ \Omega = \frac{\pi n}{30} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C = \frac{30}{\pi} KI}$$

Calcul de C_N

$$C_N = \frac{30}{\pi} 0,147 \cdot 20 \Rightarrow \boxed{C_N = 28Nm}$$

K étant une fonction croissante de J, et K et I étant indépendants l'un de l'autre, C est maximum lorsque J et I le sont, donc pour $J = J_N$ et $I = I_N$. De ce fait, C_N est bien le maximum de couple que l'on peut obtenir.

3) Relation entre les grandeurs

$$U = RI + E' \Rightarrow \boxed{U = RI + Kn}$$

Calcul de U et de $U_{\text{réf}}$

$$C = C_N \Rightarrow I = I_N = 20A \quad J = J_N \Rightarrow K = 0,147V \cdot \text{min/tr} \quad \text{d'où} \quad U = 1 \cdot 20 + 0,147 \cdot 1000 \quad \text{soit} \quad \boxed{U = 167V}$$

Vu les caractéristiques du convertisseur, U doit être inférieur à 200V. C'est bien le cas ici (en d'autres termes, ce point de fonctionnement peut effectivement être obtenu). On a donc $U = kU_{\text{réf}}$, d'où $U_{\text{réf}} = 167/20$, soit

$$\boxed{U_{\text{réf}} = 8,35V}$$

4) Calcul de n_1

$$C = C_N \Rightarrow I = I_N = 20A \quad \text{et} \quad J = J_N \quad \text{donc} \quad U = 1 \cdot 20 + 0,147n. \quad \text{Comme} \quad U \quad \text{est} \quad \text{limité} \quad \text{à} \quad 200V, \quad \text{la} \quad \text{valeur} \quad \text{maximale} \quad \text{de} \quad n \quad \text{est} \quad \text{donnée} \quad \text{par} \quad n_1 = \frac{200 - 20}{0,147}, \quad \text{soit} \quad \boxed{n_1 = 1225\text{tr/min}}$$

5) Calcul de J et de C

n étant supérieur à n_1 , le fonctionnement se fait à U constant et égal à 200V. D'autre part, pour avoir le couple maximum possible, il faut que $I = 20A$. Il vient donc $200 = 20 + Kn$, soit $K = \frac{200 - 20}{n} = \frac{180}{n}$. Ceci permet de calculer K et d'en déduire J d'après la courbe tracée au 1). C, lui, se déduit de $C = \frac{30}{\pi} KI$, en remplaçant K par sa valeur numérique (ou par $180/n$) et I par 20A. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

n(tr/min)	1300	1400	1500
K(V·min/tr)	0,138	0,129	0,120
J(A)	0,78	0,62	0,53
C(Nm)	26,4	24,6	22,9

6) Courbe $C_{\text{max}} \equiv f(n)$

Pour n compris entre 0 et 1225tr/min, $C_{\text{max}} = C_N = 28Nm$. Au-delà, on utilise les résultats de la question précédente. La courbe correspondante est représentée page suivante.

7)a) Courbe $C_r \equiv f(n)$ – Valeur maximale de n

Voir page suivante pour le tracé. La vitesse maximale correspond à l'intersection de cette courbe avec la caractéristique $C_{\text{max}} = f(n)$. On obtient $\boxed{n_{\text{max}} = 1420\text{tr/min}}$

Valeurs correspondantes de U et de J

L'intersection se produisant dans la zone à U constant, il vient immédiatement $\boxed{U = 200V}$

Dans cette zone, $K = 180/n$, d'où $K = 180/1420 = 0,127V \cdot \text{min/tr}$, valeur à laquelle correspond $\boxed{J = 0,6A}$

b) Valeurs de J, U et $U_{\text{réf}}$

Imposer n revient ici à imposer C, donc le produit KI. A priori, le point de fonctionnement pourrait être atteint en défluxant la machine. Mais, comme on impose que les pertes Joule d'induit soient minimales, il faut que K soit maximum. Ceci implique

– d'une part, que $\boxed{J = J_N = 1A}$

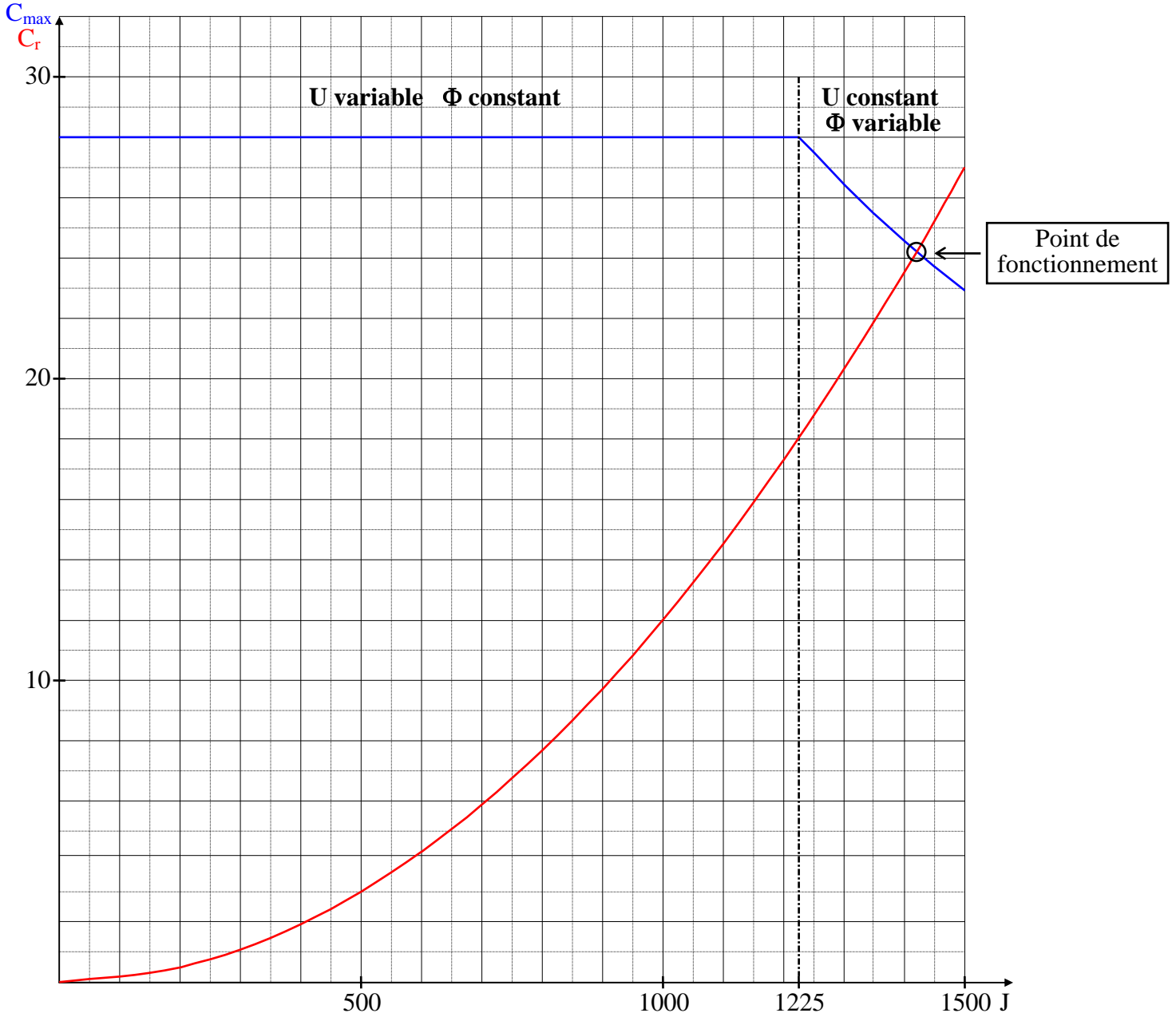
– d'autre part, que le réglage de la vitesse se fait en agissant sur U par l'intermédiaire de $U_{\text{réf}}$.

On a donc $U = 1 \cdot I + Kn$ avec $K = 0,147V \cdot \text{min/tr}$, $n = 1000\text{tr/min}$ et I qui se déduit du couple. Sachant que

$C = C_r = 1,2 \cdot 10^{-5} 1000^2 = 12 \text{Nm}$, il vient $I = \frac{\pi}{30 \cdot 0,147} 12 = 8,55 \text{A}$, d'où $U = 1 \cdot 8,55 + 0,147 \cdot 1000$, soit

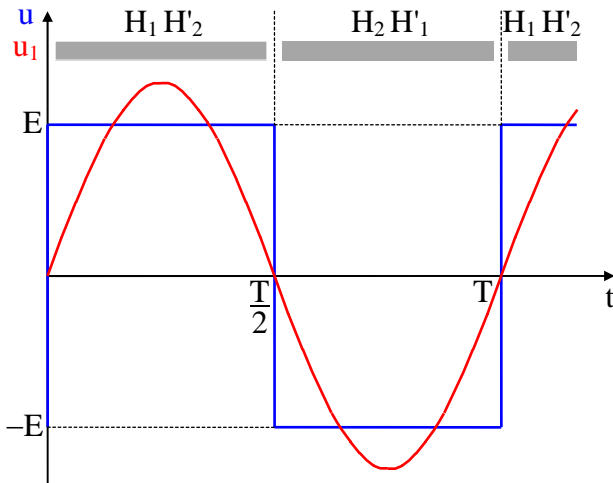
$$U = 156 \text{V}$$

Cette valeur est évidemment inférieure à 200V, d'où $U_{\text{réf}} = U/k = 156/20$ soit $U_{\text{réf}} = 7,8 \text{V}$



1) a) Allure de u

Dans tous les exercices concernant les onduleurs, nous appelons intervalles de commande les intervalles de temps pendant lequel les interrupteurs sont commandés à l'état passant. L'étude montre qu'en commande complémentaire, ce qui est systématiquement le cas actuellement, l'interrupteur bidirectionnel constitué par l'ensemble [H;D] est fermé pendant tout l'intervalle de commande. La tension de sortie ne dépend donc que de



ces intervalles, ce qui permet de la tracer sans prendre en compte le courant débité. Compte tenu de ceci, on obtient l'allure représentée ci-contre en remarquant que $u = E$ lorsque H_1 et H'_2 sont commandés et que $u = -E$ lorsque H_2 et H'_1 le sont.

b) Allure de u_1 – Calcul de U_1

Le tracé de u_1 (Cf. ci-contre) s'obtient compte tenu du fait que, vu l'allure de u , le fondamental est centré sur la tension et que sa valeur crête vaut $4E/\pi$, soit environ $1,25E$.

$$U_1 = \frac{4E}{\pi} / \sqrt{2} = \frac{4 \cdot 200}{\pi \sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_1 = 180V}$$

2) a) Expression de i et de I_1

Dans tous les cas $u = L \frac{di}{dt}$. Entre 0 et $T/2$, $u = E$. Il vient donc $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$, dont on déduit $i = \frac{E}{L}t + A$, soit, compte

tenu de la condition initiale $i(0) = I_0$,

$$\boxed{i = \frac{E}{L}t + I_0}$$

$I_1 = i(T/2) \Rightarrow$

$$\boxed{I_1 = \frac{E T}{L 2} + I_0}$$

b) Nouvelle expression de i

On a maintenant $u = -E$. La même démarche que ci-dessus conduit à $i = \frac{-E}{L}t + B$, où B se déduit de la condi-

tion de continuité $i(T/2) = I_1$, soit $\frac{-E T}{L 2} + B = \frac{E T}{L 2} + I_0$, ce qui donne $B = \frac{E}{L}T + I_0$. Il vient donc finalement

$$\boxed{i = -\frac{E}{L}t + \frac{E}{L}T + I_0}$$

c) Expression de I_0

Vu ce qui précède, l'évolution de i est linéaire, croissante entre 0 et $T/2$ et décroissante ensuite. Le courant présente donc une forme triangulaire, et sa valeur moyenne vaut $(I_0 + I_1)/2$ (Cf. par exemple exercice 19). Or, dans un onduleur, la valeur moyenne de la tension est toujours nulle. Il en est donc de même de celle du

courant, ce qui entraîne $I_0 = -I_1$. Ceci, reporté dans l'expression de I_1 trouvée au a), donne $-I_0 = \frac{E T}{L 2} + I_0$, soit

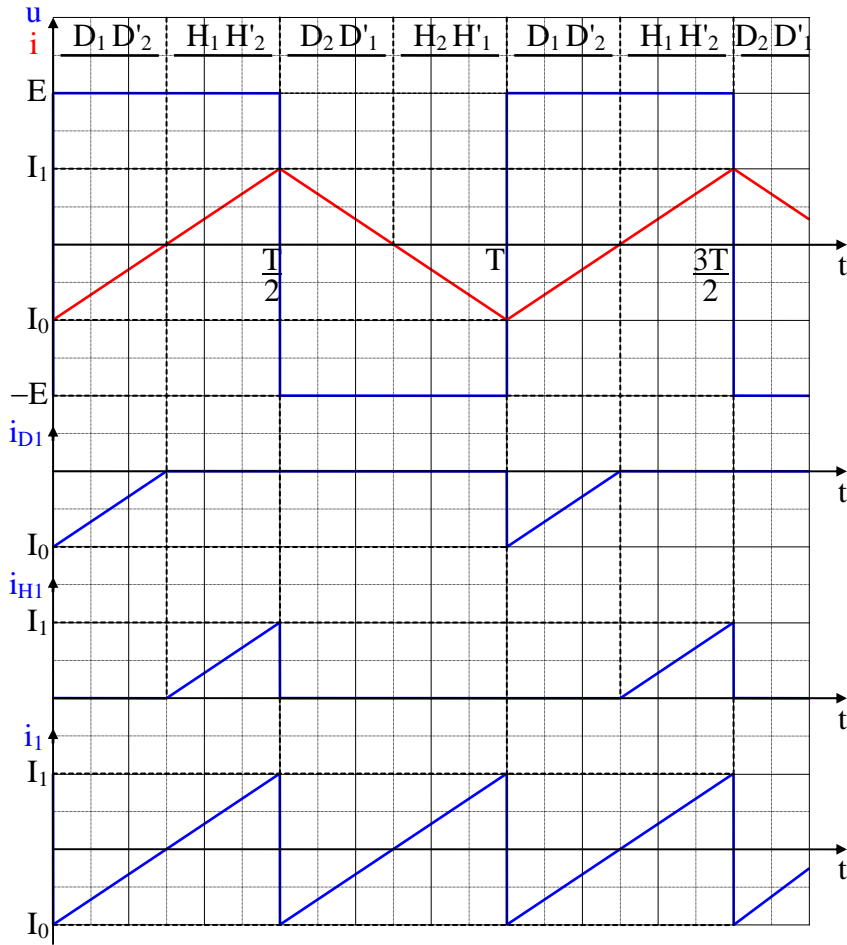
$$\boxed{I_0 = -\frac{E T}{L 4}}$$

Allures de u et de i – Intervalles de conduction – Allures de i_{D1} , i_{H1} et i_1

Le tracé de u et de i est immédiat. Les intervalles de conduction s'obtiennent en remarquant que:

- sur l'intervalle de commande de H_1 et de H'_2 , H_1 et H'_2 conduisent si i est positif, D_1 et D'_2 conduisent si i est négatif
- sur l'intervalle de commande de H_2 et de H'_1 , H_2 et H'_1 conduisent si i est négatif, D_2 et D'_1 conduisent si i est positif.

Par ailleurs, $i_{H1} = i$ si H_1 conduit et $i_{H1} = 0$ sinon, $i_{D1} = i$ si D_1 conduit et $i_{D1} = 0$ sinon, $i_1 = i$ lorsque H_1 et H'_2 sont commandés à l'état passant et $i_1 = -i$ lorsque H_2 et H'_1 sont commandés à l'état passant.



3)a) Expressions de $Z(j\omega)$, de I_1 et de φ

Il vient immédiatement

$$\underline{Z}(j\omega) = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$I_1 = \frac{U_1}{\underline{Z}(j\omega)} \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

b) Valeurs de ω_0 , T, I_1 , et v_{Cmax} (v_{Cmax} , valeur crête de la tension aux bornes du condensateur)

La résonance est obtenue lorsque I_1 est maximum, donc lorsque son dénominateur est minimum. Ce dernier étant égal à la somme de deux carrés, si l'un des deux peut s'annuler, cela correspond forcément au minimum

(en d'autres termes, la partie imaginaire est nulle à la résonance, ce qui constitue une autre façon d'écrire la condition). ω_0 est donc tel que $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$, d'où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \cdot 10^{-6}}}$, soit $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1000} \quad \text{soit} \quad T = 6,28 \text{ ms}$$

Vu l'annulation du deuxième terme au dénominateur de I_1 , on a simplement $I_1 = \frac{U_1}{R} = \frac{180}{10}$, soit $I_1 = 18 \text{ A}$

Comme on admet que le courant se réduit à son fondamental, la valeur efficace V_C de la tension aux bornes du condensateur vaut $\frac{I_1}{C\omega_0}$. On en déduit $v_{C\text{max}} = \frac{I_1}{C\omega_0} \sqrt{2} = \frac{18}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 1000} \sqrt{2}$, soit $v_{C\text{max}} = 2550 \text{ V}$

c) Calculs de I_1 et de φ

$$\omega = 0,95\omega_0 = 0,95 \cdot 1000 = 950 \text{ rad/s} \Rightarrow I_1 = \frac{180}{\sqrt{10^2 + \left(0,1 \cdot 950 - \frac{1}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 950}\right)^2}} \quad \text{soit} \quad I_1 = 12,6 \text{ A}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{0,1 \cdot 950 - \frac{1}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 950}}{10}\right) \quad \text{soit} \quad \varphi = -45,7^\circ$$

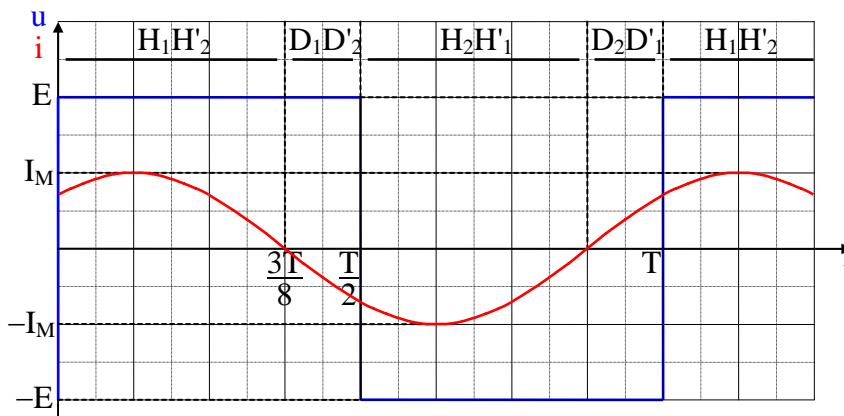
$$\omega = 1,05\omega_0 = 1,05 \cdot 1000 = 1050 \text{ rad/s} \Rightarrow I_1 = \frac{180}{\sqrt{10^2 + \left(0,1 \cdot 1050 - \frac{1}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 1050}\right)^2}} \quad \text{soit} \quad I_1 = 12,9 \text{ A}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{0,1 \cdot 1050 - \frac{1}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 1050}}{10}\right) \quad \text{soit} \quad \varphi = 44,3^\circ$$

Allures de u et de i – Intervalles de conduction – Régimes de commutation

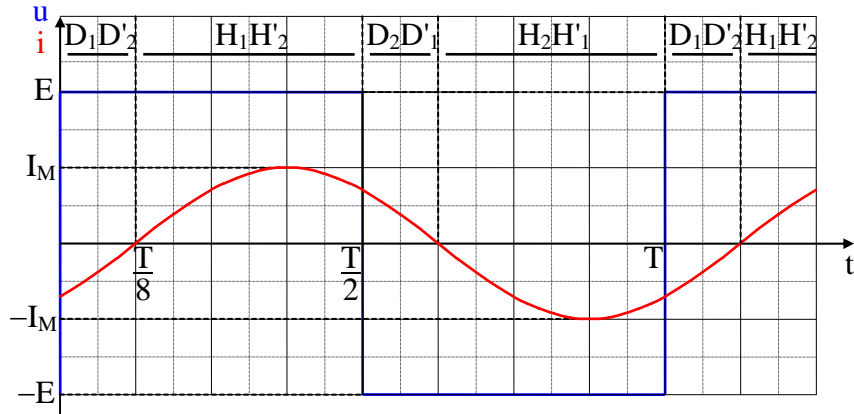
En valeur absolue, les deux déphasages sont voisins de 45° , ce qui correspond à $T/8$. De même, les valeurs crête I_M des courants, égales à $I_1 \sqrt{2}$, sont quasiment égales. Pour les intervalles de conduction, la démarche est identique à celle utilisée précédemment. On obtient donc les tracés suivants.

$$\omega = 950 \text{ rad/s}$$



Les interrupteurs se bloquant par annulation de courant, on est en présence d'une commutation naturelle.

$$\omega = 1050 \text{ rad/s}$$



Ici, le courant dans les interrupteurs est encore positif au moment du blocage. Par ailleurs, comme le montre l'étude de ce type d'onduleurs, après le blocage, la tension aux bornes des interrupteurs remonte immédiatement à une valeur positive. On ne peut donc avoir, ni blocage par annulation de tension, ni blocage par inversion de tension. De ce fait, les interrupteurs fonctionnent en commutation forcée.

1) Allure de u

Elle s'obtient en remarquant que $u = E$ lorsque H_1 est commandé et que $u = -E$ lorsque H_2 l'est. D'autre part, vu l'échelle choisie, une valeur relative de 0,1 correspond à 1cm. Voir à la fin de l'exercice pour le tracé.

2) Valeurs de $\Delta i / \Delta t$

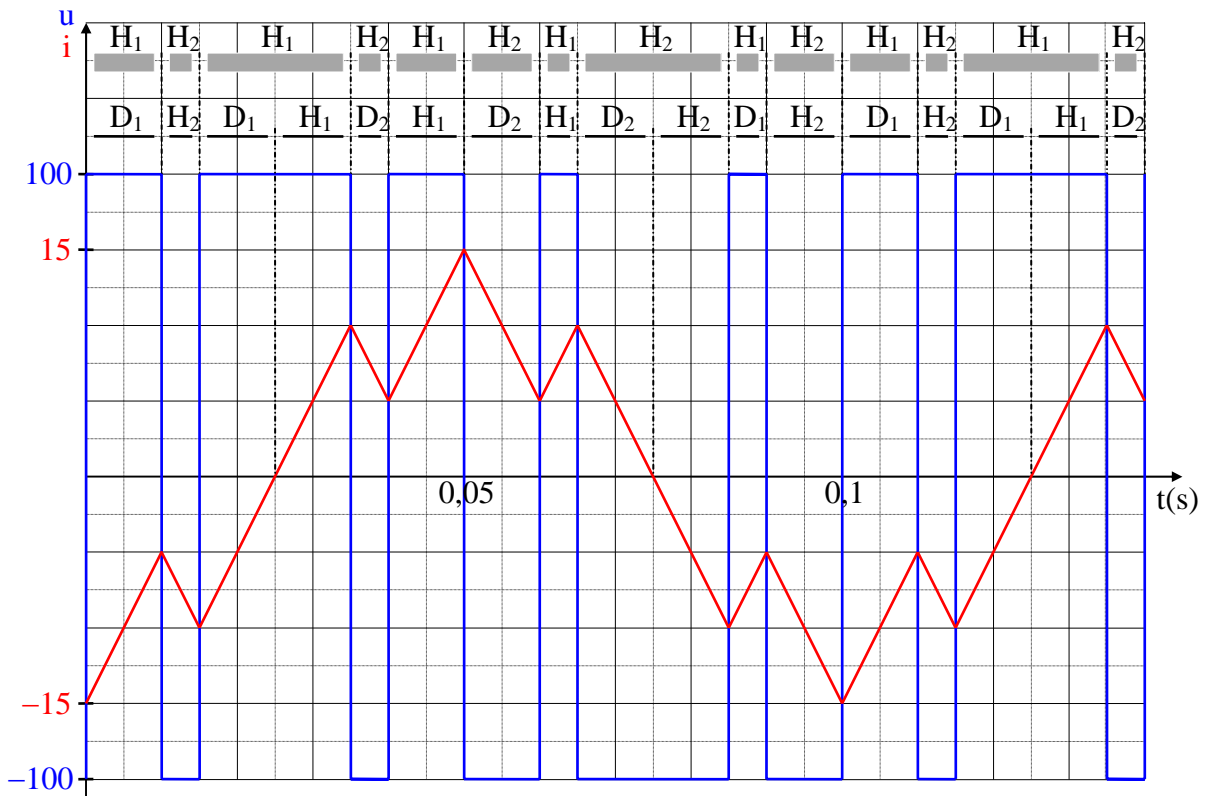
Dans tous les cas $u = L \frac{di}{dt}$ avec u constant. L'évolution de i est donc linéaire, ce qui permet de confondre la dérivée et la pente sur tout l'intervalle où u ne change pas de signe. Il s'ensuit que $\frac{\Delta i}{\Delta t} = \pm \frac{E}{L} = \pm \frac{100}{0,1}$, soit

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \pm 1000 \text{ A/s}$$

3) Allure de i – Intervalles de conduction

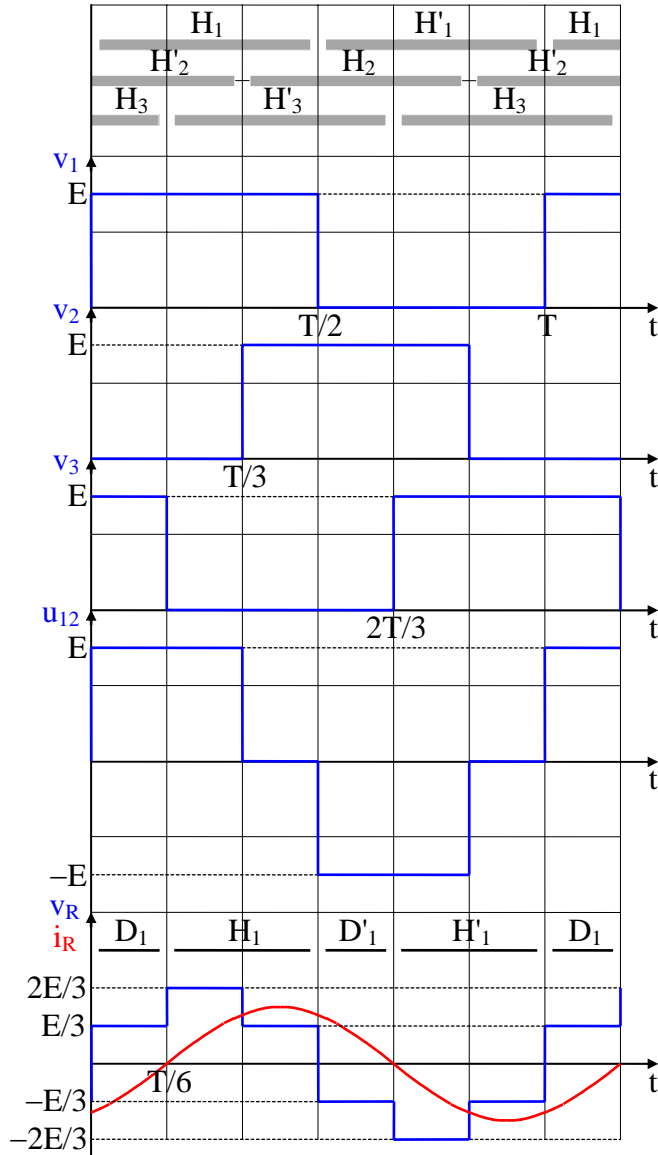
A l'échelle du tracé, la pente de $\pm 1000 \text{ A/s}$ se traduit par $\pm 200 \text{ cm}/100 \text{ cm}$, soit $\pm 2 \text{ cm}/\text{cm}$. Les intervalles de conduction s'obtiennent par le même raisonnement que dans l'exercice 28:

- sur l'intervalle de commande de H_1 , H_1 conduit si i est positif et D_1 conduit si i est négatif
- sur l'intervalle de commande de H_2 , H_2 conduit si i est négatif et D_2 conduit si i est positif.



N.B.: Pour simplifier, la valeur initiale de i a été fournie par l'énoncé. Si ce n'avait pas été le cas, il aurait fallu effectuer une étude préliminaire, par exemple en esquissant l'allure du courant à partir d'une valeur initiale arbitraire et à utiliser le fait que sa valeur moyenne est nulle pour déterminer $i(0)$.

1) Allure des différentes grandeurs



Pour v_1 , v_2 et v_3 , on procède comme dans les exercices précédents. On en déduit u_{RS} , en remarquant que cette tension est égale à $v_1 - v_2$, ce qui conduit au tracé ci-contre, qui regroupe l'ensemble des résultats.

2) Expressions et allure de v_R

On se laisse ici guider par le résultat:

$$u_{RS} = v_R - v_S \Rightarrow v_S = v_R - u_{RS}$$

$$u_{RT} = v_R - v_T \Rightarrow v_T = v_R - u_{RT}$$

Ces deux relations, reportées dans $v_R + v_S + v_T = 0$, donnent

$$v_R + v_R - u_{RS} + v_R - u_{RT} = 0, \text{ d'où on déduit}$$

$$v_R = \frac{u_{RS} + u_{RT}}{3}$$

Or, on a aussi $u_{RS} = v_1 - v_2$ et $u_{RT} = v_1 - v_3$. Ceci, reporté dans l'expression précédente, conduit à

$$v_R = \frac{2v_1 - v_2 - v_3}{3}$$

3) Allure de i – Intervalles de conduction

En remarquant que i est sinusoïdal et passe par zéro au temps $t = T/6$, le tracé est immédiat. Les intervalles de conduction s'obtiennent à nouveau comme dans les exercices précédents.

4)a) Valeurs de V_{1C} , V_{2C} et V_{3C}

Les tensions v_1 , v_2 et v_3 étant identiques au décalage près, elles ont la même valeur moyenne. Celle-ci peut

s'obtenir en raisonnant en termes d'aires: $V_{1C} = V_{2C} = V_{3C} = \frac{T/2 \cdot E}{T}$, soit $V_{1C} = V_{2C} = V_{3C} = \frac{E}{2}$

Expressions de $v_{2n}(t)$ et de $v_{3n}(t)$

$$v_{2n}(t) = v_{1n}\left(t - \frac{T}{3}\right) = V_n \sqrt{2} \sin\left[n \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{T}{3}\right)\right] = V_n \sqrt{2} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t - n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{3}\right)$$

soit

$$v_{2n}(t) = V_n \sqrt{2} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t - n \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_{3n}(t) = v_{1n}\left(t - \frac{2T}{3}\right) = V_n \sqrt{2} \sin\left[n \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2T}{3}\right)\right] = V_n \sqrt{2} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t - n \frac{4\pi}{T} \frac{T}{3}\right)$$

soit

$$v_{3n}(t) = V_n \sqrt{2} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t - n \frac{4\pi}{3}\right)$$

Cas n multiple de 3

Les angles $n\frac{2\pi}{3}$ et $n\frac{4\pi}{3}$ sont alors des multiples de 2π , ce qui entraîne l'égalité des trois termes sinusoïdaux.

On a donc effectivement dans ce cas

$$V_{1n} = V_{2n} = V_{3n}$$

Cas n non multiple de 3

n = 1

Dans ce cas, on a $v_{11}(t) = V_1\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $v_{21}(t) = V_1\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{3}\right)$ et $v_{31}(t) = V_1\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{4\pi}{3}\right)$.

Ces trois tensions ont même valeur efficace et sont déphasées entre elles de $2\pi/3$ et de $4\pi/3$. Elles forment donc un système équilibré direct, dont une des propriétés est que la somme des tensions instantanées est nulle.

n = 5

On a alors $v_{15}(t) = V_5\sqrt{2} \sin\left(5\frac{2\pi}{T}t\right)$, $v_{25}(t) = V_5\sqrt{2} \sin\left(5\frac{2\pi}{T}t - 5\frac{2\pi}{3}\right)$ et $v_{35}(t) = V_5\sqrt{2} \sin\left(5\frac{2\pi}{T}t - 5\frac{4\pi}{3}\right)$.

Or, $5(2\pi/3)$ est égal à $4\pi/3$ modulo 2π et $5(4\pi/3)$ est égal à $2\pi/3$ modulo 2π . Les trois expressions précédentes se réduisent donc à $v_{15}(t) = V_5\sqrt{2} \sin\left(5\frac{2\pi}{T}t\right)$, $v_{25}(t) = V_5\sqrt{2} \sin\left(5\frac{2\pi}{T}t - \frac{4\pi}{3}\right)$ et

$v_{35}(t) = V_5\sqrt{2} \sin\left(5\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{3}\right)$. De même, on est en présence d'un système équilibré (inverse cette fois) dont

la somme instantanée des tensions est à nouveau nulle. D'où, en admettant le résultat pour n quelconque,

$$V_{1n} + V_{2n} + V_{3n} = 0$$

Remarque: On peut aussi retrouver les résultats précédents de la façon suivante:

En notant pour simplifier $x = n2\pi/T$ et en ne tenant pas compte du terme $V_n\sqrt{2}$, commun aux trois, on a

$$v_{2n} + v_{3n} = \sin\left(x - n\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - n\frac{4\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{2x - n6\pi/3}{2}\right)\cos\left(\frac{n2\pi/3}{2}\right) = 2\sin(x - n2\pi)\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

Or $\sin(x - n2\pi) = -\sin x$ et $\cos(n\pi/3) = 0,5$ quel que soit n impair non multiple de 3. On a donc $v_{2n} + v_{3n} = -v_{1n}$, soit $v_{1n} + v_{2n} + v_{3n} = 0$. A noter que, pour n impair et multiple de 3, $\cos(n\pi/3)$ vaut -1 . La somme peut donc s'écrire $3v_{1n}$, ce qui est une des conséquences de l'égalité des trois tensions.

b) Décomposition en série de Fourier de v_R

$$v_R = \frac{2v_1 - v_2 - v_3}{3} = \frac{1}{3} \left[2 \left(\frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{1n} \right) - \left(\frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{2n} \right) - \left(\frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{3n} \right) \right] = \dots$$

$$\dots \frac{1}{3} \left[E - \frac{E}{2} - \frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2v_{1n} - v_{2n} - v_{3n}) \right] \quad \text{soit} \quad v_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_{1n} - v_{2n} - v_{3n}}{3}$$

On constate effectivement que v_R ne comporte pas de termes constants. Par ailleurs:

- pour n multiple de 3, comme $v_{2n} = v_{3n} = v_{1n}$, on a $2v_{1n} - v_{2n} - v_{3n} = 0$, d'où $v_{Rn} = 0$
- pour n non multiple de 3, comme $-v_{2n} - v_{3n} = v_{1n}$, on a $2v_{1n} - v_{2n} - v_{3n} = 3v_{1n}$, d'où $v_{Rn} = v_{1n}$

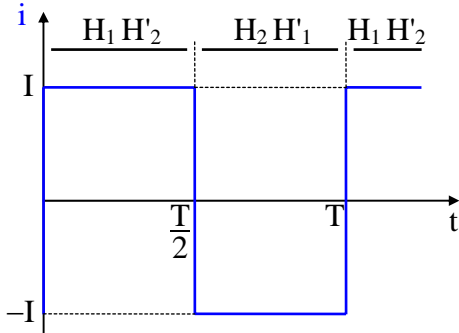
ce qui est bien conforme aux affirmations de l'énoncé.

Application

Pour $n = 3$ et $n = 9$, les harmoniques de v_R sont nuls. Pour les autres, on a $V_{Rn} = V_n = \frac{\sqrt{2}E}{\pi n} = \frac{\sqrt{2} 500}{\pi n}$. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

n	1	3	5	7	9
$V_{Rn}(V)$	225	0	45	32,2	0

1) Allure de i



Dans un commutateur, le sens du courant est forcé par la source d'alimentation. Ceci rend inutile l'adjonction de diodes en parallèle inverse sur les interrupteurs et a pour corollaire que les intervalles de commande et de conduction sont confondus. En ce qui concerne le tracé (voir ci-contre), le raisonnement est le même que pour les onduleurs de tension: $i = I$ lorsque H_1 et H'_2 conduisent et $i = -I$ lorsque H_2 et H'_1 conduisent.

2) Valeurs de I_1 , I_3 et I_5

$$I_1 = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I \quad I_3 = \frac{I_1}{3} \quad I_5 = \frac{I_1}{5} \quad \text{d'où} \quad \boxed{I_1 = 0,9A \quad I_3 = 0,3A \quad I_5 = 0,18A}$$

3)a) Expression de $Y(j\omega)$

On obtient sans difficulté

$$\boxed{Y(j\omega) = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

b) Valeur de C

La résonance est obtenue pour une pulsation ω_0 telle que $C\omega_0 = 1/L\omega_0$. D'autre part, on veut que ω_0 soit égal à $2\pi/T$, soit $2\pi/0,01 = 628\text{rad/s}$. Il vient donc $C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{0,04 \cdot 628^2}$, soit $\boxed{C = 63,3\mu F}$

Valeurs de Y On note Y_n les termes correspondants

Pour $\omega = \omega_0$, Y_1 se réduit à $1/R = 0,01S$.

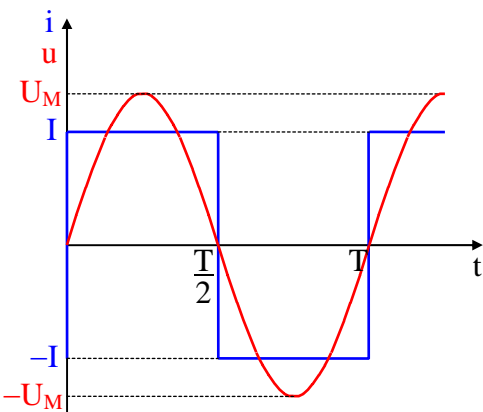
$$\text{Pour } 3\omega_0 \text{ et } 5\omega_0, \text{ on a } Y_n = \left| \frac{1}{R} + j\left(Cn\omega_0 - \frac{1}{Ln\omega_0}\right) \right| = \left| \frac{1}{100} + j\left(63,3 \cdot 10^{-6} n628 - \frac{1}{0,04n628}\right) \right| \text{ avec } n=3 \text{ et } n=5.$$

Les résultats figurent dans le tableau ci-après.

Valeurs de U_n – Conclusion – Allure de u

Pour chaque harmonique, on a $U_n = \frac{I_n}{Y_n}$. Les résultats sont regroupés ci-dessous.

n	1	3	5
$I_n(A)$	0,9	0,3	0,18
$Y_n(S)$	0,01	0,107	0,191
$U_n(V)$	90	2,82	0,942



On voit que U_3 et U_5 sont petits devant U_1 (pour les harmoniques d'ordre supérieur, I_n continue à décroître et Y_n à croître, donc U_n serait encore plus faible). Il s'ensuit que u se réduit pratiquement à son fondamental, d'amplitude $U_M = 90\sqrt{2} = 127V$. Pour le tracé (Cf. ci-contre), il suffit de remarquer que, comme Y_1 est réel, u_1 est en phase avec le fondamental de i, lui-même centré sur le courant.

1) Expression de C_e

De $C_e \Omega = E' i$, avec E' (f.é.m. à vide de la machine) égal à $k\Omega$, on déduit $C_e = ki$

2)a) Relation entre les grandeurs

L'équation fondamentale de la dynamique des systèmes en rotation donne immédiatement $J \frac{d\Omega}{dt} = C_e - C_r - C_p$

soit, en remplaçant C_e par son expression $J \frac{d\Omega}{dt} = ki - C_r - C_p$

3)a) Expression de Ω

Avec $i = I_D$, il vient $J \frac{d\Omega}{dt} = kI_D - C_r - C_p$

Vu les hypothèses faites sur les couples, le deuxième membre de la relation précédente est constant. On a donc $\Omega = \frac{kI_D - C_r - C_p}{J} t + A$. Par ailleurs, comme il s'agit d'un démarrage, la valeur initiale de Ω est nulle, ce qui

entraîne $A = 0$. D'où $\Omega = \frac{kI_D - C_r - C_p}{J} t$

Expression de t_0

t_0 est tel que $\Omega(t_0) = \Omega_0$. On obtient sans difficulté $t_0 = \frac{J\Omega_0}{kI_D - C_r - C_p}$

Application numérique

$t_0 = \frac{0,13 \cdot 150}{1 \cdot 40 - C_r - 1} \Rightarrow C_r = 0: t_0 = 0,5s \quad C_r = 19Nm: t_0 = 0,975s$

b) Expression de Ω

La même démarche, avec $i = -I_D$, conduit à $\Omega = -\frac{kI_D + C_r + C_p}{J} t + B$, où B se déduit de la condition initiale

$\Omega(0) = \Omega_0$, ce qui donne $B = \Omega_0$. Il vient donc finalement $\Omega = \Omega_0 - \frac{kI_D + C_r + C_p}{J} t$

Expression de t_1

t_1 est tel que $\Omega(t_1) = 0$. On obtient sans difficulté $t_1 = \frac{J\Omega_0}{kI_D + C_r + C_p}$

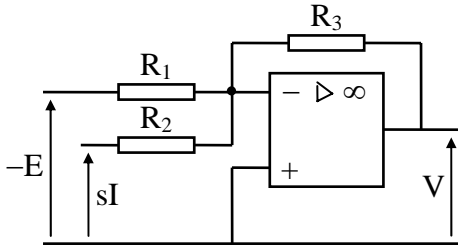
Application numérique

$t_1 = \frac{0,13 \cdot 150}{1 \cdot 40 + C_r + 1} \Rightarrow C_r = 0: t_1 = 0,476s \quad C_r = 19Nm: t_1 = 0,325s$

Si le freinage résulte du seul couple de frottement, la relation se réduit à $t_1 = \frac{J\Omega_0}{C_p}$. Il vient donc $t_1 = \frac{0,13 \cdot 150}{1}$,

soit $t_1 = 19,5s$

1) Relation liant V, R et I – Valeurs de A et de R₀



Vu les hypothèses faites, le courant dérivé par R₂ est négligeable devant I. Le schéma pour cette partie se réduit donc à celui représenté ci-contre.

En appliquant alors la loi aux nœuds au potentiel – de l'amplificateur opérationnel; il vient $\frac{-E}{R_1} + \frac{sI}{R_2} + \frac{V}{R_3} = 0$, d'où on tire $V = \frac{R_3}{R_1} E - \frac{R_3}{R_2} sI$,

soit

$$V = \frac{R_3}{R_1} \left(E - \frac{R_1 s}{R_2} I \right)$$

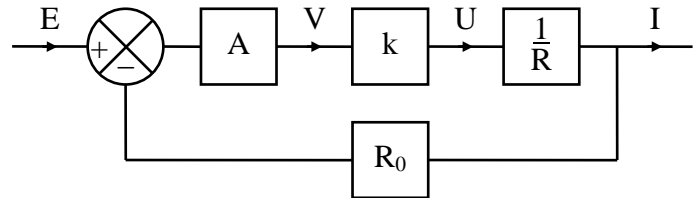
Par identification avec $V = A(E - R_0 I)$, on obtient

$$A = \frac{R_3}{R_1} \quad R_0 = \frac{R_1 s}{R_2}$$

Application numérique: $A = \frac{10^6}{10^5}$ soit $A = 10$ $R_0 = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{10^3}$ soit $R_0 = 1 \Omega$

2) Schéma fonctionnel

Il dérive de $\begin{cases} V = A(E - R_0 I) \\ U = kV \\ I = U/R \end{cases}$, d'où le tracé ci-contre

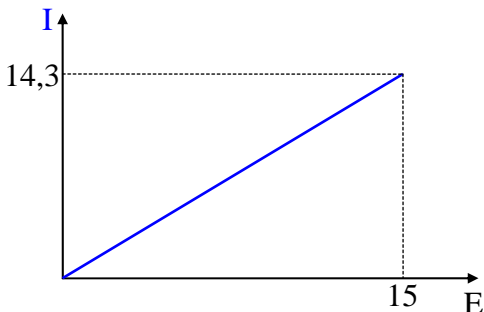


Expression de I

On utilise la relation générale correspondant à ce type de structure, soit $I = \frac{H}{1+L} E$, où H est égal au produit des fonctions de transfert des différents blocs situés entre le comparateur et la sortie du montage, et L est égal au produit des fonctions de transfert de tous les blocs constituant l'asservissement. Il vient donc

$$I = \frac{Ak \frac{1}{R}}{1 + Ak \frac{1}{R} R_0} E, \text{ soit } I = \frac{Ak}{R + AkR_0} E$$

Courbe I = f(E)



Numériquement, $I = \frac{10 \cdot 20}{10 + 10 \cdot 20 \cdot 1} E = 0,952 E$. C'est une droite passant par l'origine, dont il suffit de calculer un deuxième point, par exemple celui correspondant à 15V, soit $0,952 \cdot 15 = 14,3 A$ (Cf. ci-contre pour le tracé).

1) Relations entre les grandeurs

On commence par déterminer l'expression du couple moteur C_m dans le cas général. En notant $E' = k_m \Omega$ la f.é.m. à vide du moteur, on a $C_m = \frac{E'i}{\Omega} = \frac{k_m \Omega i}{\Omega}$, soit $C_m = k_m i$

Toutes les grandeurs étant continues, on les note ici par des majuscules. Avec ces notations, on déduit de l'étude

des différents éléments de montage le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \varepsilon = E - E_t & [1] \\ U = A\varepsilon & [2] \\ U = RI + E' = RI + k_m \Omega & [3] \\ E_t = k_t \Omega & [4] \end{cases}$$

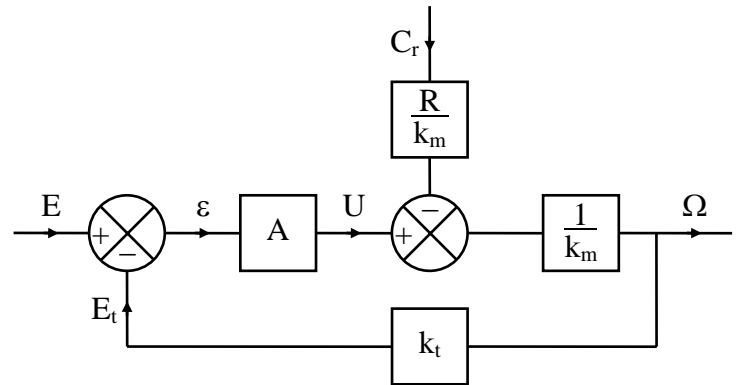
Par ailleurs, en régime permanent, le couple moteur est égal au couple résistant. On a donc $k_m I = C_r$ [5].

Expression de Ω en fonction de U et de C_r

[3] + [5] $\Rightarrow U = R \frac{C_r}{k_m} + k_m \Omega$, soit $\Omega = \frac{1}{k_m} \left(U - \frac{R}{k_m} C_r \right)$

Schéma fonctionnel

Son tracé (Cf. ci-contre) s'établit à partir des relations [1], [2], [4] et de celle liant Ω et U . A noter que, tout à fait logiquement, C_r joue ici le rôle d'une perturbation.



2) Expression de Ω en fonction de E et de C_r

On utilise la relation générale correspondant à ce type de structure, soit $\Omega = \frac{H}{1+L} E - \frac{H_1}{1+L} \left(\frac{R}{k_m} C_r \right)$, où :

- H est égal au produit des fonctions de transfert des différents blocs situés entre le comparateur d'entrée et la sortie du montage
- L est égal au produit des fonctions de transfert de tous les blocs constituant l'asservissement
- H_1 est égal au produit des fonctions de transfert des différents blocs situés entre l'entrée de perturbation et la sortie du montage.

Il faut noter que cette relation met en jeu la grandeur appliquée directement à l'entrée de perturbation, donc $\frac{R}{k_m} C_r$ ici.

Compte tenu de ceci, il vient $\Omega = \frac{A \frac{1}{k_m}}{1 + A \frac{1}{k_m} k_t} E - \frac{\frac{1}{k_m}}{1 + A \frac{1}{k_m} k_t} \frac{R}{k_m} C_r$, soit $\Omega = \frac{AE}{k_m + Ak_t} - \frac{R}{k_m} \frac{C_r}{k_m + Ak_t}$

Remarque: L'expression a été gardée sous cette forme afin de mettre en évidence la valeur à vide (notée Ω_0 ci-après), égale à $\frac{AE}{k_m + Ak_t}$, et la chute de vitesse en charge $\frac{R}{k_m} \frac{C_r}{k_m + Ak_t}$.

3) Application

Comme on veut les résultats pour deux valeurs différentes de A, on conserve dans un premier temps ce terme sous forme littérale. Il ne restera ensuite plus qu'à faire les applications numériques, dont il suffira de reporter les résultats dans un tableau.

A vide: $\Omega_0 = \frac{AE}{k_m + Ak_t} \Rightarrow E = \frac{k_m + Ak_t}{A} \Omega_0 = \frac{0,02 + 0,02A}{A} 250 = \frac{5(1+A)}{A}$.

En charge: Vu ce qui précède, on a $\Omega = \Omega_0 - \frac{R}{k_m} \frac{C_{rM}}{k_m + Ak_t}$, soit $\Omega = 250 - \frac{5}{0,02} \frac{4 \cdot 10^{-3}}{0,02 + A \cdot 0,02} = 250 - \frac{50}{1+A}$

Les résultats figurent ci-contre.

A	1	100
E(V)	10	5,05
Ω (rad/s)	225	249,5

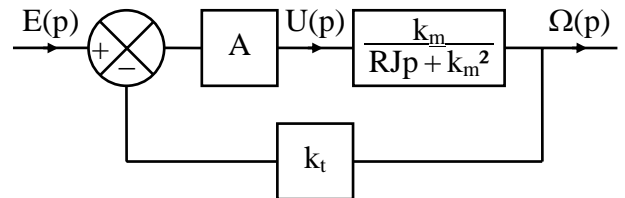
La valeur commune de I pour C = C_{rM} vaut $\frac{C_{rM}}{k_m} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{0,02}$, soit **I = 0,2A**

II)1)a) Expression de $\Omega(p)$ en fonction de U(p) – Schéma fonctionnel

$$\begin{cases} J \frac{d\Omega}{dt} = C_m - C_r = C_m \\ C_m = k_m i = k_m \frac{u - k_m \Omega}{R} \end{cases} \Rightarrow Jp\Omega(p) = k_m \frac{U(p) - k_m \Omega(p)}{R}, \text{ d'où } (RJp + k_m^2)\Omega(p) = k_m U(p), \text{ soit}$$

$$\Omega(p) = \frac{k_m}{RJp + k_m^2} U(p)$$

Il suffit ensuite de reprendre le schéma obtenu au I)1), d'y supprimer tout ce qui concerne C_r et de remplacer le bloc $\frac{1}{k_m}$ par le bloc $\frac{k_m}{RJp + k_m^2}$ (Cf. schéma ci-contre).



b) Expression de $\Omega(p)$ et de $\Omega(t)$

Vu que l'entrée est un échelon d'amplitude E, on a E(p) = E/p. De même, la relation générale correspondant à

cette structure donne $\Omega(p) = \frac{A \frac{k_m}{RJp + k_m^2}}{1 + A \frac{k_m}{RJp + k_m^2} k_t} \frac{E}{p}$, soit $\Omega(p) = \frac{Ak_m}{RJp + k_m^2 + Ak_m k_t} \frac{E}{p}$. Il suffit ensuite de

mettre le terme $k_m^2 + Ak_m k_t$ en facteur au dénominateur et de réarranger un peu l'ensemble pour obtenir

$$\Omega(p) = \frac{\frac{AE}{k_m + Ak_t}}{\left(\frac{RJp}{k_m(k_m + Ak_t)} + 1 \right) p}, \text{ que l'on peut mettre sous la forme } \Omega(p) = \frac{\Omega_0}{(\tau p + 1)p} \text{ où } \Omega_0 \text{ et } \tau \text{ ont bien les}$$

expressions données par l'énoncé.

$$\frac{1}{(\tau p + 1)p} = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{\tau p + 1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau} \Rightarrow \Omega(t) = \Omega_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Expression de t_r

t_r est tel que $\Omega(t_r) = 0,95\Omega_0$. Il vient donc $0,95\Omega_0 = \Omega_0 \left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}} \right)$, soit, tous calculs faits, $t_r = \tau \ln 20$, soit, en

remplaçant τ par son expression,

$$t_r = \frac{RJ}{k_m(k_m + Ak_t)} \ln 20$$

A.N.: $t_r = \frac{5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0,02(0,02 + A \cdot 0,02)} \ln 20 = \frac{0,0749}{1 + A} \Rightarrow \boxed{A = 1: t_r = 37,5\text{ms} \quad A = 100: t_r = 0,742\text{ms}}$

c) Expression de I_D

Au démarrage, le courant dans le moteur n'est limité que par la résistance d'induit. On a, de ce fait, $U = RI_D$.

D'autre part, $U = AE$, puisque le terme $k_t\Omega$ est nul. Il vient donc $I_D = \frac{AE}{R}$

Amplitude maximale de E

Comme $I_M = 2A$, E doit rester inférieur à $E_M = RI_M/A$. D'où $\boxed{A = 1: E_M = 10V \quad A = 100: E_M = 0,1V}$

2)a) Pour avoir $\Omega = 250\text{rad/s}$ en régime permanent avec $A = 100$, il faut donner à E une valeur de 5,05V (Cf. question 1)3)). Cette valeur étant supérieure à la valeur maximale possible de 0,1V, l'amplificateur fonctionne bien dans un premier temps en limitation d'intensité.

b) Expression de $\Omega(t)$

Vu le fonctionnement non linéaire de l'amplificateur, le schéma fonctionnel bloc n'est plus utilisable. Il faut donc repartir des équations de base (Cf. 1)a)), qui donnent $J \frac{d\Omega}{dt} = k_m I_D$. Compte tenu de la condition initiale

$\Omega(0) = 0$, on obtient sans difficulté

$$\Omega(t) = \frac{k_m I_D}{J} t$$

c) Calcul de t_r

De $\Omega(t_r) = 0,95\Omega_0$, on déduit $t_r = \frac{0,95J\Omega_0}{k_m I_D} = \frac{0,95 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 250}{0,02 \cdot 2}$, soit $\boxed{t_r = 11,9\text{ms}}$

Remarque 1: La valeur du temps de réponse est donc très supérieure à celle obtenue précédemment. Ceci est dû aux limitations inhérentes au système (pour obtenir 0,742ms, avec la même consigne, il faudrait un courant de démarrage de 101A!). Celles-ci existent forcément, mais ce problème est souvent ignoré dans la pratique, où on se contente de donner le résultat brut: "la rapidité augmente en proportion inverse de l'amplification".

Remarque 2: On peut vérifier que la valeur de Ω pour laquelle le système revient dans son domaine linéaire est supérieure à $0,95 \cdot 250 = 237,5\text{rad/s}$. En effet, en régime linéaire, $\begin{cases} u = Ri + k_m\Omega \\ u = A(E - k_t\Omega) \end{cases} \Rightarrow i = \frac{AE - (k_m + Ak_t)\Omega}{R}$.

La valeur minimale Ω_1 de Ω correspond à $i = I_D$. Elle vérifie donc $I_D = \frac{AE - (k_m + Ak_t)\Omega_1}{R}$, dont on tire

$$\Omega_1 = \frac{AE - RI_D}{k_m + Ak_t} = \frac{100 \cdot 5,05 - 5 \cdot 2}{0,02 + 100 \cdot 0,02}$$
, soit 245rad/s

1) a) Expression de C_m

$$\begin{cases} u = Ri + k_m \Omega \\ C_m = \frac{E'i}{\Omega} = \frac{k_m \Omega i}{\Omega} = k_m i \end{cases} \Rightarrow C_m = k_m \frac{u - k_m \Omega}{R} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_m = \frac{k_m}{R} u - \frac{k_m^2}{R} \Omega}$$

b) Nouvelle expression de C_m

$$\begin{cases} u = e - e_t \\ e_t = a\Omega \end{cases} \Rightarrow u = e - a\Omega, \text{ ce qui, reporté dans l'expression ci-dessus, donne } C_m = \frac{k_m}{R}(e - a\Omega) - \frac{k_m^2}{R}\Omega, \text{ soit}$$

$$C_m = \frac{k_m}{R}e - \frac{k_m}{R}(a + k_m)\Omega. \text{ Par identification avec } C = \lambda e - F\Omega, \text{ il vient } \boxed{\lambda = \frac{k_m}{R} \quad F = \frac{k_m}{R}(a + k_m)}$$

Application numérique

$$\lambda = \frac{0,02}{5} \quad \text{soit} \quad \boxed{\lambda = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/V}} \quad F = \frac{0,02}{5}(a + 0,02) \Rightarrow \boxed{a = 0: F = 8 \cdot 10^{-5} \text{ S.I.} \quad a = a_M: F = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ S.I.}}$$

2) Relations entre les grandeurs – Bloc fonctionnel

$$\begin{cases} J \frac{d\Omega}{dt} = C_m - C_r = C_m \\ C_m = \lambda e - F\Omega \end{cases} \Rightarrow \boxed{J \frac{d\Omega}{dt} = \lambda e - F\Omega}$$

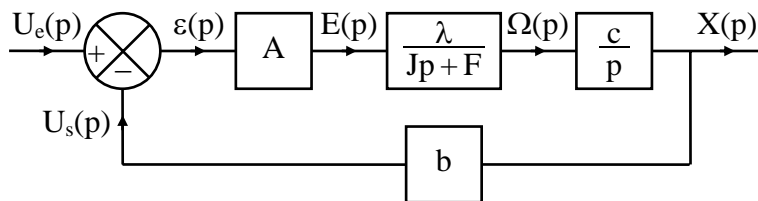
Pour le passage aux transformées de Laplace, vu que conditions initiales sont nulles, la dérivée se traduit par une simple multiplication par p . On a donc $Jp\Omega(p) = \lambda E(p) - F\Omega(p)$, soit $\boxed{\Omega(p) = \frac{\lambda}{Jp + F} E(p)}$

Le bloc fonctionnel correspondant est représenté ci-contre. 

3) Schéma fonctionnel complet

Il dérive de ce qui précède et des relations supplémentaires $\begin{cases} e = u_e - u_s \\ \frac{dx}{dt} = c\Omega \\ u_s = bx \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} E(p) = U_e(p) - U_s(p) \\ X(p) = \frac{c}{p} \Omega(p) \\ U_s(p) = bX(p) \end{cases} \quad \text{toujours}$

compte tenu du fait que les conditions initiales sont nulles. Son tracé est représenté ci-dessous.



4) a) Expression de $X(p)$

u_e échelon d'amplitude $U_0 \Rightarrow U_e(p) = U_0/p$. Cf. exercice 33, on déduit du schéma ci-dessus:

$$\Omega(p) = \frac{A \frac{\lambda}{Jp + F} \frac{c}{p} U_0}{1 + A \frac{\lambda}{Jp + F} \frac{c}{p} b} = \frac{A\lambda c}{Jp^2 + Fp + A\lambda cb} \frac{U_0}{p} \quad \text{qui peut encore s'écrire}$$

$$\Omega(p) = \frac{A\lambda cb/J}{p^2 + F/J p + A\lambda cb/J} \frac{U_0/b}{p}, \text{ expression dans laquelle il suffit de remplacer } A\lambda cb/J \text{ par } \omega_0^2, F/J \text{ par } 2m\omega_0$$

et U_0/b par X_0 pour retrouver la forme donnée par l'énoncé. On a donc bien $\omega_0 = \sqrt{\frac{A\lambda cb}{J}}$, $m = \frac{1}{2\omega_0} \frac{F}{J}$ et

$$X_0 = \frac{U_0}{b}.$$

A.N.: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1000 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 20}{10^{-6}}}$, soit $\omega_0 = 200 \text{ rad/s}$ $X_0 = \frac{2}{20} = 0,1 \text{ m}$ soit $X_0 = 10 \text{ cm}$

$$m = \frac{1}{2 \cdot 200} \frac{F}{10^{-6}} \quad \text{soit} \quad m = 2500F$$

b) Valeur de m – Expression numérique de x(t) – Tracé – Valeurs du dépassement et du temps de réponse

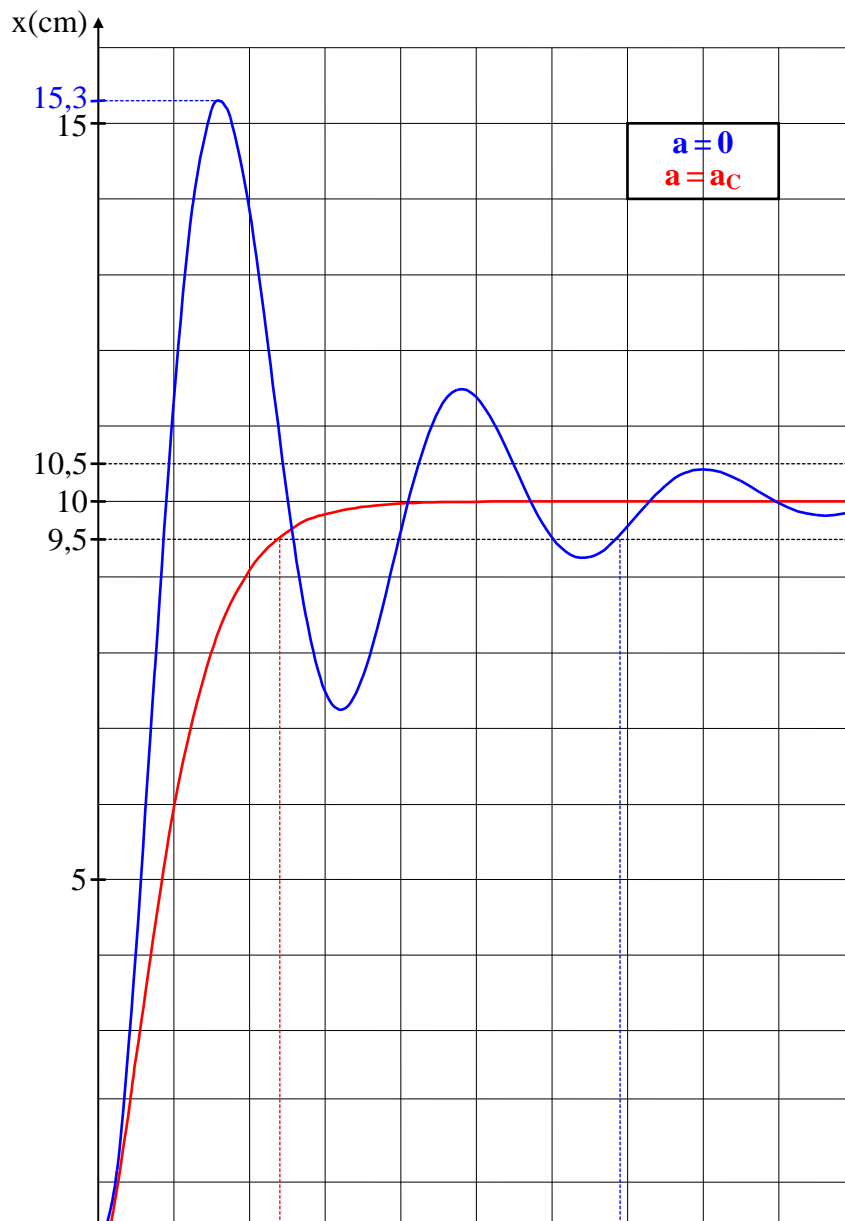
$$a=0 \Rightarrow F = 8 \cdot 10^{-5} \Rightarrow m = 2500 \cdot 8 \cdot 10^{-5} \quad \text{soit} \quad m = 0,2$$

m étant inférieur à 1, on est dans le premier cas. Tous calculs faits, on obtient, pour x en centimètres,

$$x(t) = 10 \left\{ 1 - e^{-40t} [\cos(196t) + 0,204 \sin(196t)] \right\}$$

Son allure est représentée ci-dessous, où on a également fait figurer la courbe obtenue à la question suivante.

On en déduit le dépassement δ et le temps de réponse t_r : $\delta = \frac{15,3 - 10}{10}$, soit $\delta = 53\%$ $t_r = 69 \text{ ms}$



c) Valeurs de F et de a_C – Expression numérique de $x(t)$ – Tracé – Valeurs de δ et de t_r

$$m = 1 \Rightarrow F = 1/2500 \text{ soit } \boxed{F = 4 \cdot 10^{-4} \text{ S.I.}} \quad a_C = \frac{5F}{0,02} - 0,02 = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0,02} - 0,02 \text{ soit } \boxed{a_C = 0,08 \text{ Vs/rad}}$$

Vu la valeur de m, on est dans le deuxième cas. Là encore, tous calculs faits, on obtient

$$\boxed{x(t) = 10 \left[1 - e^{-200t} (200t + 1) \right]}$$

Du tracé (Cf. page précédente), on déduit $\boxed{\delta = 0 \quad t_r = 24 \text{ ms}}$

5) Fonction de transfert en chaîne ouverte – Tracé des diagrammes

$$L(p) = A \frac{\lambda}{Jp + F} \frac{c}{p} b = \frac{A\lambda cb}{(Jp + F)p} \Rightarrow \boxed{\underline{L}(j\omega) = \frac{A\lambda cb}{(Jj\omega + F)j\omega}}$$

Or, Cf. 4)a), $A\lambda cb/J = \omega_0^2$ et $F/J = 2m\omega_0$. Il suffit de diviser numérateur et dénominateur de \underline{L} pour mettre en évidence ces termes, ce qui conduit à $\underline{L}(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{(j\omega + 2m\omega_0)j\omega} = \frac{1}{\frac{2mj\omega}{\omega_0} \left(\frac{j\omega}{2m\omega_0} + 1 \right)}$. On retrouve donc bien la

forme proposée par l'énoncé à condition de poser $\omega_1 = \omega_0/2m$ et $\omega_2 = 2m\omega_0$.

Tracé des diagrammes – Marges de phase

Dans tous les cas, Cf. 4)a), $\omega_0 = 200 \text{ rad/s}$.

Pour $a=0$, $m=0,2$, ce qui entraîne $\omega_1 = 200/(2 \cdot 0,2) = 500 \text{ rad/s}$ et $\omega_2 = 2 \cdot 0,2 \cdot 200 = 80 \text{ rad/s}$, soit en coordonnée logarithmique, vu l'échelle choisie, $5 \log \omega_1 = 13,5 \text{ cm}$ et $5 \log \omega_2 = 9,5 \text{ cm}$.

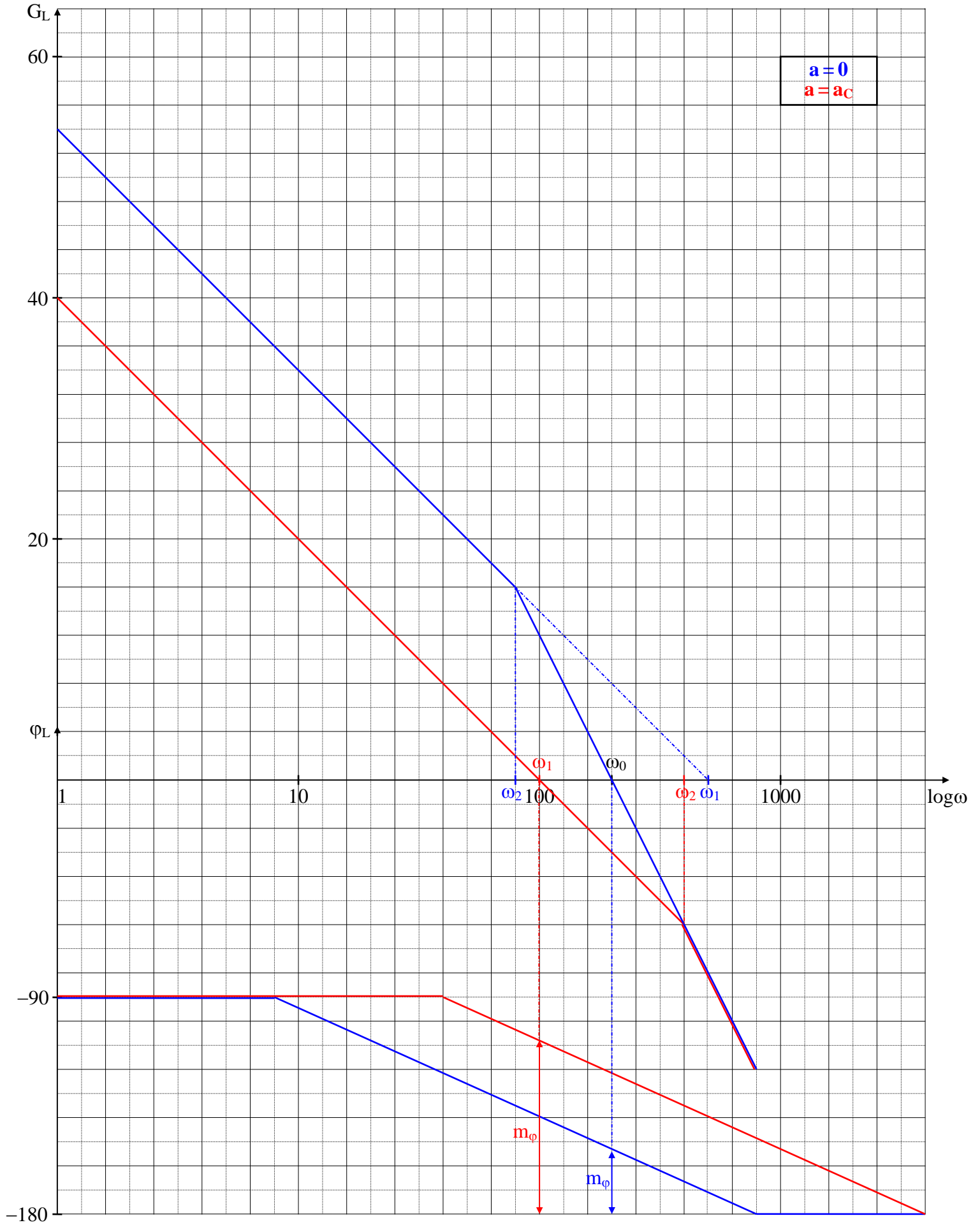
Pour $a = a_C$, $m = 1$, ce qui entraîne $\omega_1 = 200/(2 \cdot 1) = 100 \text{ rad/s}$ et $\omega_2 = 2 \cdot 1 \cdot 200 = 400 \text{ rad/s}$, soit, de même, en coordonnée logarithmique, $5 \log \omega_1 = 10 \text{ cm}$ et $5 \log \omega_2 = 13 \text{ cm}$.

On peut noter que $\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2$. Or, aux pulsations élevées, \underline{L} se réduit à $\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_1} \frac{j\omega}{\omega_2}}$, soit $\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2}$. Ceci explique que

les deux diagrammes sont confondus dans ce domaine et que le prolongement de l'asymptote commune passe par le point $[\omega_0; 0]$.

Les diagrammes sont représentés page suivante. On en déduit les marges de phase:

$$\boxed{a = 0: m_\varphi = 26^\circ \quad a = a_C: m_\varphi = 72^\circ}$$



I)1) Calcul de T_e

$$T_e = \frac{L}{R} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{10} \quad \text{soit} \quad \boxed{T_e = 3\text{ms}}$$

2) Relation entre les grandeurs – Expression de la fonction de transfert – valeur de G

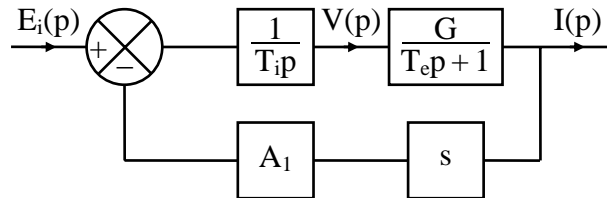
$u = Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow U(p) = RI(p) + LpI(p)$. D'autre part, $U(p) = AV(p)$. On en déduit $I(p) = \frac{A}{R + Lp} V(p)$, d'où

$$\frac{I(p)}{V(p)} = \frac{A}{R + Lp} = \frac{A/R}{L/R p + 1}, \quad \text{qui est bien de la forme} \quad \boxed{\frac{I(p)}{V(p)} = \frac{G}{T_e p + 1}} \quad \text{avec} \quad \boxed{G = \frac{A}{R}}$$

A.N.: $G = 50/10$ soit $\boxed{G = 5S}$

3) Schéma fonctionnel – Expression de $Y(p)$

Il suffit de remplacer la partie correspondant au convertisseur par sa fonction de transfert dans le schéma fourni par l'énoncé:



Pour obtenir $Y(p)$, on procède à nouveau comme dans l'exercice 33:

$$I(p) = \frac{\frac{1}{T_i p} \frac{G}{T_e p + 1}}{1 + \frac{1}{T_i p} \frac{G}{T_e p + 1} s A_1} E_i(p) = \frac{G}{T_i T_e p^2 + T_i p + G s A_1} E_i(p) \quad \text{d'où} \quad \boxed{Y(p) = \frac{G}{T_i T_e p^2 + T_i p + G s A_1}}$$

4) Valeurs des racines et des constantes de temps associées – Expression simplifiée de $Y(p)$

$T_i T_e p^2 + T_i p + G s A_1 = 0,1 \cdot 3 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,1 p + 5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 150 = 3 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,1 p + 3,75$, dont les racines r_1 et r_2 sont

$$\boxed{r_1 = -43 \quad r_2 = -290}$$

Les constantes de temps associées τ_1 et τ_2 valent $-1/r_1$ et $-1/r_2$, soit $\boxed{\tau_1 = 23,2\text{ms} \quad \tau_2 = 3,4\text{ms}}$

On constate que τ_1 est grand devant τ_2 , le système est donc quasiment du premier ordre, ce qui permet de mettre la réponse sous la forme $\frac{Y_0}{\tau_i p + 1}$, avec, en particulier, $\boxed{\tau_i = \tau_1 = 23,2\text{ms}}$

Vu que l'on néglige un terme dans la deuxième relation, on ne peut pas déterminer Y_0 par une identification directe. On procède donc comme indiqué dans l'énoncé, en comparant les deux expressions pour $p=0$. Il vient

$$\frac{G}{G s A_1} = Y_0, \quad \text{soit} \quad Y_0 = \frac{1}{s A_1} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 150}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{Y_0 = 1,33S}$$

Application

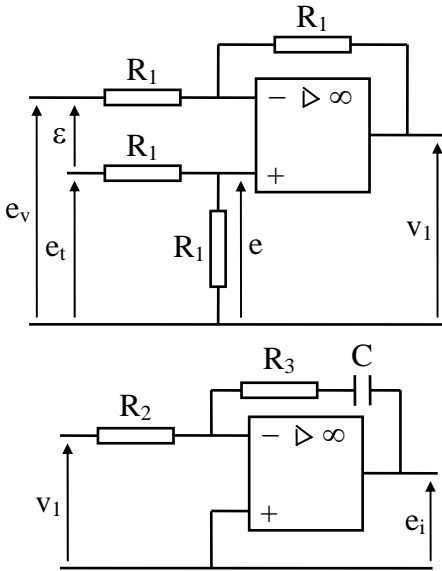
$$I(p) = Y(p) E_i(p) \quad \text{avec} \quad E_i(p) = E_i/p \quad (e_i \text{ échelon d'amplitude } E_i). \quad \text{D'où} \quad I(p) = \frac{Y_0}{\tau_i p + 1} \frac{E_i}{p} = Y_0 E_i \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau_i} \right)$$

dont on déduit

$$\boxed{i(t) = Y_0 E_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right)}$$

Le temps de réponse t_r est tel que $i(t_r) = 0,95Y_0E_i$. Il vient donc $Y_0E_i \left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau_i}}\right) = 0,95Y_0E_i$, soit, tous calculs faits, $t_r = \tau_i \ln 20 = 23,2 \cdot 10^{-3} \ln 20$, d'où $t_r = 69,5 \text{ms}$

II)1) Relations – Expression de $E_i(p)/\varepsilon(p)$



Cf. schéma ci-contre, on a immédiatement $e = e_v/2$. Par ailleurs, l'application de la loi aux nœuds à l'entrée – de l'amplificateur opérationnel conduit à $\frac{e_v - e}{R_1} + \frac{v_1 - e}{R_1} = 0$ soit $e_v + v_1 - 2e = 0$, d'où on tire, compte tenu de la première relation, $v_1 = e_t - e_v$. Or, $e_t - e_v$ est égal à $-\varepsilon$. En passant aux transformées de Laplace, il vient donc finalement

$$V_1(p) = -\varepsilon(p)$$

De même, l'application de la loi aux nœuds à l'entrée – de l'amplificateur opérationnel du schéma ci-contre, donne $\frac{V_1(p)}{R_2} + \frac{E_i(p)}{R_3 + 1/Cp} = 0$ d'où on

déduit
$$E_i(p) = -\frac{R_3 + 1/Cp}{R_2} V_1(p) = -\frac{R_3 Cp + 1}{R_2 Cp} V_1(p)$$

La combinaison des deux relations précédentes donne alors $E_i(p) = -\frac{R_3 Cp + 1}{R_2 Cp} (-\varepsilon(p)) = \frac{R_3 Cp + 1}{R_2 Cp} \varepsilon(p)$, soit

$$\frac{E_i(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_3 Cp + 1}{R_2 Cp}, \text{ qu'il suffit de mettre sous la forme } \frac{E_i(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_3}{R_2} \frac{R_3 Cp + 1}{R_3 Cp} \text{ pour obtenir le résultat suggéré}$$

par l'énoncé. On a donc bien $\frac{E_i(p)}{\varepsilon(p)} = k \frac{\tau p + 1}{\tau p}$ avec $k = \frac{R_3}{R_2}$ et $\tau = R_3 C$.

2) Expressions de C_m – Application numérique

En notant E' la f.é.m. du moteur, on a $C_m = \frac{E' i}{\Omega}$. Or, $E' = k_m \Omega$. Ceci entraîne $C_m = \frac{k_m \Omega i}{\Omega}$, soit $C_m = k_m i$

En remplaçant ensuite i par $Y_0 e_i$, il vient $C_m = k_m Y_0 e_i \equiv \lambda e_i$ avec $\lambda = k_m Y_0$

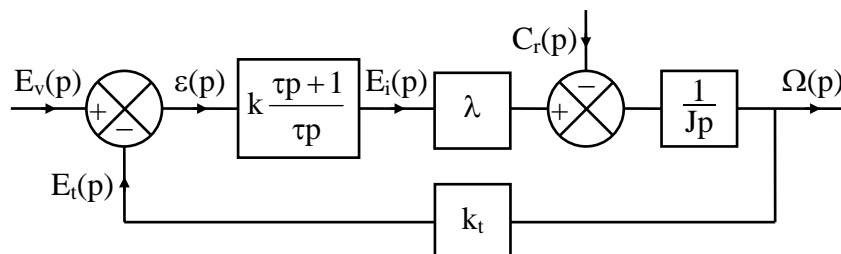
A.N.: $\lambda = 1,1 \cdot 1,33 \Rightarrow$ $\lambda = 1,46 \text{Nm/V}$

3) Relation entre les grandeurs – Schéma fonctionnel

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_m - C_r = \lambda e_i - C_r \Rightarrow \text{Jp}\Omega(p) = \lambda E_i(p) - C_r(p)$$

Il suffit ensuite de mettre cette relation sous la forme $\Omega(p) = \frac{1}{Jp} [\lambda E_i(p) - C_r(p)]$ et de tenir compte des rela-

tions $E_i(p) = k \frac{\tau p + 1}{\tau p} \varepsilon(p)$ et $\varepsilon(p) = E_v(p) - E_i(p) = E_v(p) - k_i \Omega(p)$ pour obtenir le tracé ci-dessous.



4) Expression de $L(p)$ et de τ_1

$$L(p) = k \frac{\tau p + 1}{\tau p} \lambda \frac{1}{Jp} k_t \Rightarrow$$

$$L(p) = \frac{k \lambda k_t}{\tau J} \frac{\tau p + 1}{p^2}$$

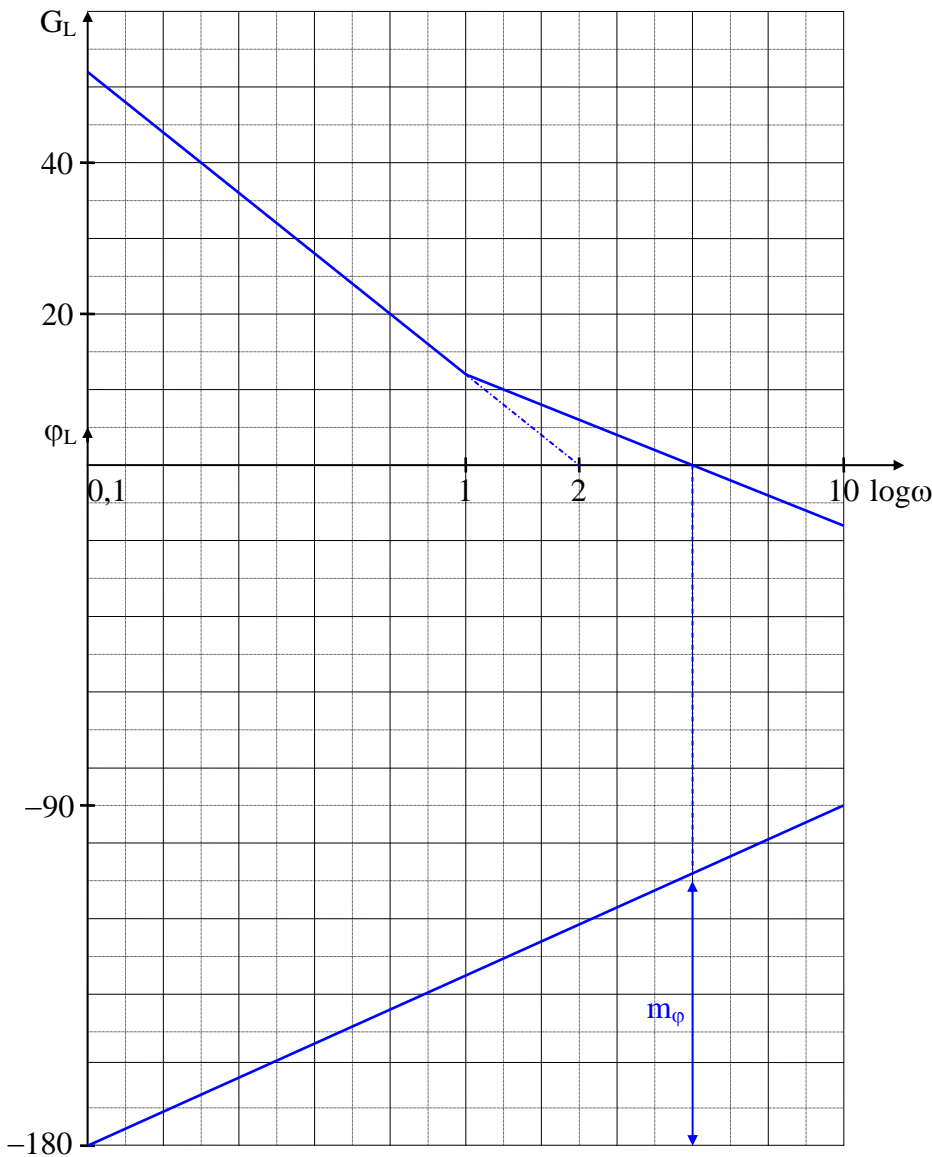
Par identification avec $L(p) = \frac{\tau p + 1}{(\tau_1 p)^2}$, il vient $\tau_1^2 = \frac{\tau J}{k \lambda k_t}$, soit

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{\tau J}{k \lambda k_t}}$$

Calcul de k – Diagrammes asymptotiques – Marge de phase

$$k = \frac{\tau J}{\tau_1^2 \lambda k_t} = \frac{1 \cdot 0,07}{0,5^2 \cdot 1,46 \cdot 0,057} \quad \text{soit} \quad \boxed{k = 3,36}$$

Numériquement, on a $L(p) = \frac{p+1}{\left(\frac{p}{2}\right)^2}$, d'où $\underline{L}(j\omega) = \frac{1+j\omega}{\left(\frac{j\omega}{2}\right)^2}$. Les courbes correspondantes figurent ci-dessous.



On en déduit la marge de phase:

$$\boxed{m_\phi = 73^\circ}$$

N.B.: Lorsque, comme c'est le cas ici, la courbe de gain ne coupe qu'une fois l'axe des abscisses, on peut calculer directement la marge de phase en écrivant qu'elle est égale à $180^\circ + \text{Arg}(\underline{L}(j\omega_1))$, où ω_1 est la valeur de ω pour laquelle le module de \underline{L} est égal à 1. Dans le cas présent, ceci conduirait à $\omega_1 = 4,12 \text{ rad/s}$, $\text{Arg}(\underline{L}(j\omega_1)) = -103,6^\circ$ et $m_\phi = 76,4^\circ$.

5)a) Expression de $\Omega(p)$

Compte tenu de $e_v = 0$, on déduit du schéma fonctionnel tracé au 3) que $\Omega(p) = -\frac{\frac{1}{Jp}}{1 + \frac{1}{Jp} k_t k \frac{\tau p + 1}{\tau p} \lambda} C_r(p)$.

Or, le terme après le signe + du dénominateur est, par définition, la fonction de transfert en chaîne ouverte $L(p)$.

Il vient donc

$$\Omega(p) = -\frac{1}{1+L(p)} \frac{C_r(p)}{Jp}$$

b) Nouvelle expression de $\Omega(p)$

C_r échelon d'amplitude $C \Rightarrow C_r(p) = C/p$. D'où, compte tenu de l'expression de $L(p)$, $\Omega(p) = -\frac{1}{1+\frac{\tau p+1}{(\tau_1 p)^2}} \frac{C}{Jp^2}$,

que l'on peut, par exemple, simplifier sous la forme

$$\Omega(p) = -\frac{1}{p^2 + \frac{\tau}{\tau_1^2} p + \frac{1}{\tau_1^2}} \frac{C}{J}$$

c) Expression numérique de $\Omega(t)$

$\tau = 1s$, $\tau_1 = 0,5s$ et $C = 14Nm \Rightarrow \Omega(p) = -\frac{1}{p^2 + \frac{1}{0,5^2} p + \frac{1}{0,5^2}} \frac{14}{0,07} = -\frac{200}{p^2 + 4p + 4} = -\frac{200}{(p+2)^2}$, dont la transformée inverse est

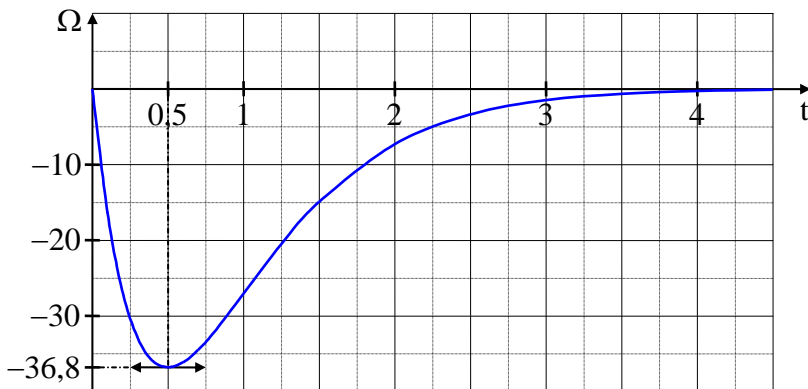
$$\Omega(t) = -200te^{-2t}$$

Coordonnées de l'extremum – Allure de $\Omega(t)$

La dérivée de $\Omega(t)$ vaut $-200e^{-2t}(1-2t)$. De ce fait, elle s'annule pour $t = 1/2$. La valeur correspondante de Ω est $\Omega(t) = -200 \cdot 0,5 \cdot e^{-1}$, soit $-36,8rad/s$. $\Omega(t)$ présente donc un minimum de coordonnées

$$t = 0,5s \quad \Omega = -36,8rad/s$$

La courbe correspondante est représentée ci-dessous.



I)1) a) Expression de la puissance électromagnétique

En notant P_e cette puissance, on a $P_e = 3 \frac{R}{g} I_q^2$. Or, $\frac{R}{g} I_q = L \omega I_d$ (même tension V_u aux bornes des éléments

R/g et L). On a donc

$$P_e = 3L\omega I_d I_q$$

Expression de C_m

$$C_m = P_e / \Omega_s = P_e / (\omega / p_p) \Rightarrow$$

$$C_m = 3p_p L I_d I_q$$

b) Expression de ω

$L \omega I_d = \frac{R}{g} I_q \Rightarrow g \omega = \frac{R I_q}{L I_d}$. Or $g = 1 - \frac{\Omega}{\Omega_s} = 1 - \frac{p_p \Omega}{\omega}$. On a donc également $g \omega = \omega - p_p \Omega$. D'où, en égalant les

deux expressions de $g \omega$, il vient $\frac{R I_q}{L I_d} = \omega - p_p \Omega$, soit

$$\omega = p_p \Omega + \frac{R I_q}{L I_d}$$

c) Expression de I

En écrivant l'égalité de la tension aux bornes de L et de R/g , sous forme complexe, il vient $jL\omega I_d = \frac{R}{g} I_q$. On

en déduit que $\arg(I_q) = \pi/2 + \arg(I_d)$, donc que ces deux courants sont en quadrature. Il s'ensuit que leur somme I a bien pour module $\sqrt{I_d^2 + I_q^2}$.

d) Application numérique

$$I_q = \frac{C_m}{3p_p L I_d} = \frac{5}{3 \cdot 2 \cdot 0,44 \cdot 1,6} \Rightarrow I_q = 1,18A \quad \omega = 2 \frac{\pi 1500}{30} + \frac{5,6 \cdot 1,18}{0,44 \cdot 1,6} \Rightarrow \omega = 324 \text{rad/s}$$

$$\begin{cases} I = \sqrt{1,6^2 + 1,18^2} = 1,99A \\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{324}{2\pi} = 51,6\text{Hz} \end{cases} \quad \text{Les valeurs de consigne sont donc } I = 1,99A \quad f = 51,6\text{Hz}$$

2) Expression de C_m en fonction de e_i – Valeur de λ

$$\begin{cases} C_m = 3p_p L I_d I_q \\ I_q = Y_0 e_i \end{cases} \Rightarrow C_m = 3p_p L I_d Y_0 e_i. \text{ Comme } I_d \text{ est constant, } C_m \text{ est proportionnel à } e_i. \text{ On a donc bien } C_m = \lambda e_i$$

avec $\lambda = 3p_p L I_d Y_0$ A.N.: $\lambda = 3 \cdot 2 \cdot 0,44 \cdot 1,6 \cdot 0,2$ soit $\lambda = 0,845 \text{Nm/V}$

II)1) Valeur de k_t

$$k_t = \frac{10}{\left(\frac{\pi 1500}{30}\right)} \Rightarrow k_t = 0,0637 \text{Vs/rad}$$

2) Expressions de $\Omega(p)$ et de $E_t(p)/E_i(p)$ – Valeur de τ_v

Comme on se limite au fonctionnement à vide, le couple résistant est nul. On a donc $J \frac{d\Omega}{dt} = C_m = \lambda e_i$ dont on

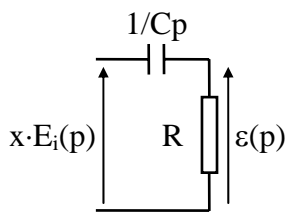
déduit $Jp\Omega(p) = \lambda E_i(p)$, soit

$$\Omega(p) = \frac{\lambda}{Jp} E_i(p)$$

$$\Omega = e_i / k_t \Rightarrow \frac{E_t(p)}{k_t} = \frac{\lambda}{Jp} E_i(p) \quad \text{soit} \quad \frac{E_t(p)}{E_i(p)} = \frac{\lambda k_t}{Jp}$$

Par identification avec la forme $1/\tau_v$, il vient $\tau_v = \frac{J}{\lambda k_t}$ A.N.: $\tau_v = \frac{0,04}{0,845 \cdot 0,0637}$ soit $\tau_v = 0,743s$

3)a) Expression de T(p)



Vu les hypothèses effectuées et le fait que l'amplificateur opérationnel fonctionne dans son domaine linéaire (donc que ϵ_v est aussi la d.d.p. aux bornes de R), on peut simplifier le schéma comme indiqué ci-contre. On en déduit $\epsilon(p) = \frac{R}{R + 1/Cp} x \cdot E_i(p)$, soit

$$\frac{E_i(p)}{\epsilon(p)} = \frac{1}{x} \frac{RCp + 1}{RCp}, \text{ d'où}$$

$$T(p) = \frac{1}{x} \frac{1 + RCp}{RCp}$$

b) Nouvelle expression de T(p) – Valeurs extrêmes de x et de k

L'identification est immédiate ici. On a donc bien $T(p) = k \frac{1 + \tau p}{\tau p}$ avec $k = 1/x$ et $\tau = RC$.

Le terme x correspond au rapport du diviseur potentiométrique formé par R_1 ; R_2 et R_3 . Il vient donc:

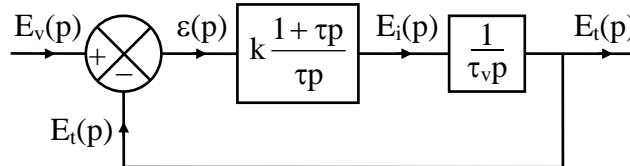
$$x_{\min} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2,7}{2,7 + 10 + 120} \text{ soit } x_{\min} = 0,0203$$

$$x_{\max} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2,7 + 10}{2,7 + 10 + 120} \text{ soit } x_{\max} = 0,0957$$

$$k_{\min} = 1/x_{\max} = 1/0,0957 \Rightarrow k_{\min} = 10,4 \quad k_{\max} = 1/x_{\min} = 1/0,0203 \Rightarrow k_{\max} = 49,3$$

4) Schéma fonctionnel

On obtient sans difficulté:



5) Expression de E_t(p)/E_v(p)

Cf. exercices précédents, on a $E_t(p) = \frac{k \frac{1 + \tau p}{\tau p} \frac{1}{\tau_v p}}{1 + k \frac{1 + \tau p}{\tau p} \frac{1}{\tau_v p}} E_v(p)$, soit, après simplification et réarrangement,

$$\frac{E_t(p)}{E_v(p)} = \frac{k(\tau p + 1)}{\tau \tau_v p^2 + k \tau p + k}$$

Le régime critique correspond au cas où le discriminant du dénominateur est nul, soit $(k\tau)^2 - 4\tau\tau_v k = 0$, soit encore,

$$k\tau = 4\tau_v$$

6) Nouvelle fonction de transfert E_t(p)/E_i(p) – Expression de L(p)

Le remplacement de λ par $\lambda/(1 + \tau_c p)$ dans l'expression de $E_t(p)/E_i(p)$ obtenue au 2) donne $\frac{E_t(p)}{E_i(p)} = \frac{\lambda k_t}{(1 + \tau_c p) J p}$.

Comme $\lambda k_t / J = 1/\tau_v$, on retrouve bien la forme suggérée par l'énoncé, soit

$$\frac{E_t(p)}{E_i(p)} = \frac{1}{\tau_v p (1 + \tau_c p)}$$

Compte tenu de ceci, on a $L(p) = k \frac{1 + \tau p}{\tau p \tau_v p (1 + \tau_c p)}$, soit, après regroupement de quelques termes,

$$L(p) = \frac{k(1 + \tau p)}{\tau \tau_v p^2 (1 + \tau_c p)}$$

b) Expression de $L(j\omega)$

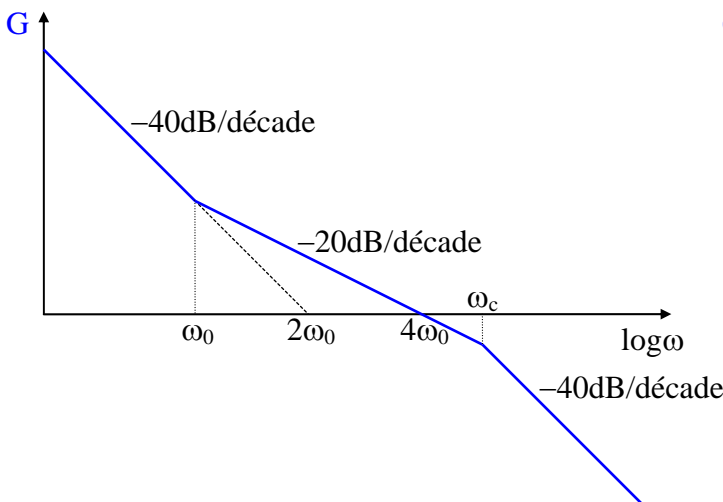
En remplaçant k par $4\tau_v/\tau$ dans l'expression de $L(p)$, il vient $L(p) = \frac{4\tau_v/\tau(1 + \tau p)}{\tau \tau_v p^2 (1 + \tau_c p)} = \frac{4(1 + \tau p)}{(\tau p)^2 (1 + \tau_c p)}$. On en

déduit $\underline{L}(j\omega) = \frac{4(1 + \tau j\omega)}{(\tau j\omega)^2 (1 + \tau_c j\omega)} = \frac{1 + \tau j\omega}{(\tau j\omega/2)^2 (1 + \tau_c j\omega)}$. En procédant par identification avec la forme proposée

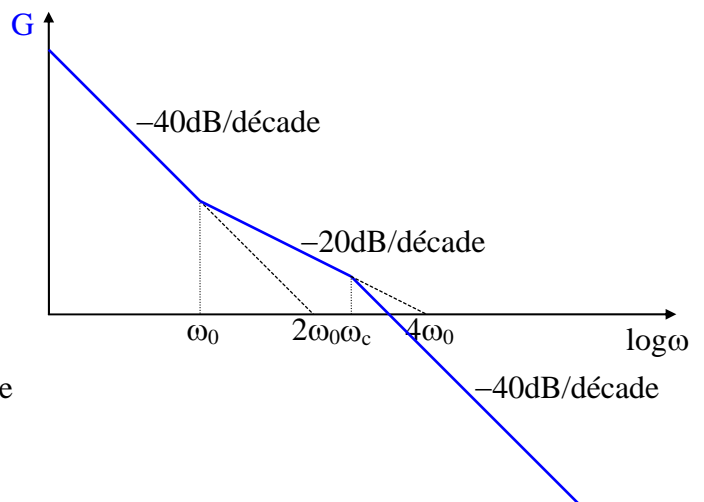
par l'énoncé, on obtient effectivement $\omega_0 = 1/\tau \quad \omega_c = 1/\tau_c$

c) Valeur minimale de ω_c

Par rapport au diagramme correspondant aux pulsations ω_0 et $2\omega_0$, le terme $1 + j\omega/\omega_c$ introduit une décroissance supplémentaire de 20dB/décade à partir de ω_c . Pour que l'ensemble coupe l'axe des abscisses avec une pente de -20dB/décade, il faut que cette décroissance n'apparaisse qu'au-delà du point où le diagramme initial coupait l'axe horizontal (Cf. ci-dessous). La valeur minimale de ω_c est donc $\omega_{cmin} = 4\omega_0$



Cas ω_c supérieur à $4\omega_0$: coupure à -20dB/décade



Cas ω_c inférieur à $4\omega_0$: coupure à -40dB/décade

Valeurs de τ et de k

$$\omega_c = 16\omega_0 = 16/\tau \Rightarrow \tau = 16/\omega_c = 16\tau_c = 16 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ soit } \tau = 0,16\text{s}$$

$$k = 4\tau_v/\tau = 4 \cdot 0,743/0,16 \Rightarrow k = 16,6$$

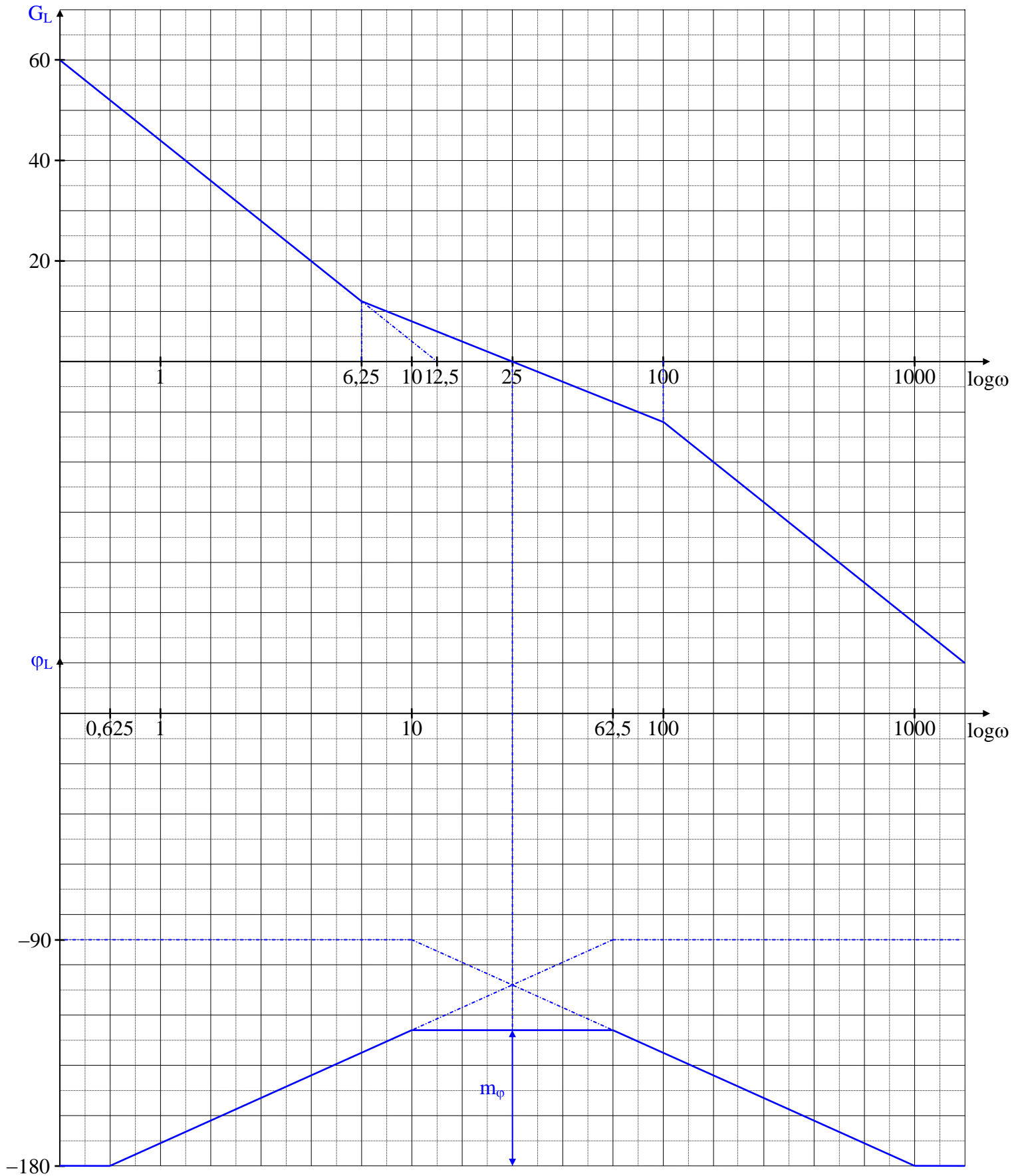
Diagrammes asymptotiques – Marge de phase

Numériquement, $\omega_0 = 1/0,16 = 6,25\text{rad/s}$ et $\omega_c = 1/0,01 = 100\text{rad/s}$. On a donc $\underline{L}(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{6,25}}{\left(\frac{j\omega}{12,5}\right)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)}$.

Avec l'échelle choisie pour les abscisses, en comptant évidemment celles-ci à partir du point 1rad/s,

$$\omega_0 \rightarrow 5\log 6,25 = 4\text{cm} \quad 2\omega_0 \rightarrow 5\log 12,5 = 5,5\text{cm} \quad 4\omega_0 \rightarrow 5\log 25 = 7\text{cm} \quad \omega_c \rightarrow 5\log 100 = 10\text{cm}$$

Les diagrammes figurent page suivante. On en déduit la marge de phase: $m_\phi = 52^\circ$



N.B.: On a choisi ici la valeur de τ (donc de ω_0) pour être dans le cas dit de l'« optimum symétrique », où la courbe de phase présente un axe de symétrie passant par le point où la courbe de gain coupe l'axe des abscisses, ce qui se traduit par l'avance de phase maximale possible.

I)1) Calcul de m

$$m = \frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{314}{380} \Rightarrow \boxed{m = 0,826}$$

2)a) Calcul du facteur de puissance

$$f = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{3}UI} = \frac{140 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 250} \Rightarrow \boxed{f = 0,851}$$

N.B.: Tous les signaux étant sinusoïdaux ici, f est aussi le cosinus du déphasage φ entre la tension simple et le courant en ligne. On a donc $\varphi = \arccos(0,851) = 31,7^\circ$.

b) Calcul de la puissance réactive

$$Q = P \tan \varphi = 140 \cdot 10^3 \tan 31,7 \Rightarrow \boxed{Q = 86,5 \text{ kVAR}}$$

c) Calcul du couple nominal

$C_N = \frac{P_{eN}}{\Omega_s}$. Comme toutes les pertes sont négligées $P_{eN} = P$. D'autre part $\Omega_s = \omega/p = 100\pi/2 = 50\pi$. On a donc

$$C_N = \frac{140 \cdot 10^3}{50\pi}, \text{ soit } \boxed{C_N = 891 \text{ Nm}}$$

d) Calcul du rendement

$$\begin{cases} \eta = P_u/P_a \\ P_u = C_N \Omega \\ P_a = P_{eN} = C_N \Omega_s \end{cases} \Rightarrow \eta = \frac{\Omega}{\Omega_s} = \frac{n}{n_s} \text{ avec } n_s = 60f/p = 60 \cdot 50/2 = 1500 \text{ tr/min. Il vient donc } \eta = \frac{1455}{1500}, \text{ soit}$$

$$\boxed{\eta = 97\%}$$

3) Expression de E_2

Cf. étude théorique du moteur asynchrone $\boxed{E_2 = mgV}$

4) Calcul de la résistance additionnelle notée R_a

Toujours Cf. étude du moteur asynchrone, on montre qu'à couple imposé, le rapport R_{2t}/g est constant (R_{2t} résistance totale du circuit rotorique). Il suffit alors de partir de deux points judicieusement choisis:

a) $R_{2t} = R_2 = 0,015 \quad g = 1 - 1455/1500 = 0,03$

b) $R_{2t} = R_2 + R_a = 0,015 + R_a \quad g = 1 - 750/1500 = 0,5$

et d'exploiter la condition $R_{2t}/g = \text{constante}$.

$$\frac{0,015}{0,03} = \frac{0,015 + R_a}{0,5} \Rightarrow R_a = 0,5 \frac{0,015}{0,03} - 0,015 \text{ soit } \boxed{R_a = 0,235 \Omega}$$

Calcul du rendement

Les hypothèses sur les pertes restant les mêmes que précédemment, le rendement s'exprime toujours par

$$\eta = \frac{n}{n_s}, \text{ soit } \eta = \frac{750}{1500}, \text{ d'où } \boxed{\eta = 50\%}$$

II)1)a) Allure de u_D – Expression de U_{DC}

Les courbes correspondant à cette partie sont tracées page 5. Elles sont données sans justification. Si nécessaire,

on pourra se reporter aux exercices sur les ponts redresseurs, par exemple EL3 et EL10.

$$U_{DC} = \frac{1}{\pi/3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} u_{2rs} d\theta \quad \text{avec } u_{2rs} = E_2 \sqrt{6} \cos(\theta - \pi/3) = mgV \sqrt{6} \cos(\theta - \pi/3) \Rightarrow U_{DC} = \frac{3mgV\sqrt{6}}{\pi}.$$

Comme on pose $U_0 = \frac{3\sqrt{6}V}{\pi}$, on a effectivement $\boxed{U_{DC} = mgU_0}$

b) Expression de p_2

$$p_2 = U_{DC} I_C \Rightarrow \boxed{p_2 = mgU_0 I_C}$$

2)a) Allure de u_{TC} – Expression de U_{TC}

$$U_{TC} = \frac{1}{\pi/3} \int_{\frac{\pi}{6} + \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} u_{rs} d\theta \quad \text{avec } u_{rs} = m'V \sqrt{6} \cos(\theta - \pi/3) \Rightarrow U_{TC} = \frac{3m'V\sqrt{6}}{\pi} \cos\alpha \quad \text{soit, toujours avec}$$

$$U_0 = \frac{3\sqrt{6}V}{\pi}, \quad \boxed{U_{TC} = m'U_0 \cos\alpha}$$

b) Allures de v_R , i_R et i_{Rf} – Expression de φ_1

v_R est en phase avec v_r . i_R est égal à $m'I_C$ quand T_r conduit, à $-m'I_C$ quand T_r' conduit et zéro sinon. i_{Rf} est "centré" sur i_R . On déduit du tracé que $\boxed{\varphi_1 = \alpha}$

c) Expressions de P_1 et de Q_1

Le transformateur étant supposé parfait, les puissances sont les mêmes que celles au secondaire. On a donc $P_1 = U_{TC} I_C$, soit $\boxed{P_1 = m'U_0 I_C \cos\alpha}$

$$Q_1 = P_1 \tan\varphi_1 \quad \text{avec } \varphi_1 = \alpha \quad \boxed{Q_1 = P_1 \tan\alpha}$$

3)a) Relations entre les grandeurs

La valeur moyenne de la tension aux bornes de L étant nulle, on a $\boxed{U_{DC} + U_{TC} = RI_C}$

En remplaçant U_{DC} et U_{TC} par leurs expressions obtenues précédemment, il vient $\boxed{mgU_0 + m'U_0 \cos\alpha = RI_C}$

b) Relation entre C et I_C

$$p_2 = gP_e = gC\Omega_s \Rightarrow mgU_0 I_C = gC\Omega_s \quad \text{d'où } \boxed{C = \frac{mU_0}{\Omega_s} I_C}$$

A.N.: On commence par calculer U_0 , qui sert également dans la suite: $U_0 = \frac{3\sqrt{6}V}{\pi} = \frac{3\sqrt{6} \cdot 380 / \sqrt{3}}{\pi} = 513V$

$$I_{CN} = \frac{\Omega_s}{mU_0} C_N = \frac{50\pi}{0,826 \cdot 513} 891 \Rightarrow \boxed{I_{CN} = 330A}$$

c) Calcul de α , des puissances et du facteur de puissance

$$3)a) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{RI_C - mgU_0}{m'U_0} = \frac{RI_C}{m'U_0} - \frac{mg}{m'}. \quad C = C_N \Rightarrow I_C = I_{CN} = 330A \quad g = 1 - 750/1500 = 0,5$$

$$\text{D'où } \cos\alpha = \frac{0,08 \cdot 330}{0,477 \cdot 513} - \frac{0,826 \cdot 0,5}{0,477} = -0,758 \quad \text{dont on déduit } \boxed{\alpha = 139^\circ}$$

$$P_1 = 0,477 \cdot 513 \cdot 330 \cdot \cos 139 \quad \boxed{P_1 = -60,9kW}$$

$$Q_1 = P_1 \tan\varphi_1 = -60,9 \cdot 10^3 \tan 139 \quad \boxed{Q_1 = 52,9kVAR}$$

$$P_T = P + P_1 = 140 \cdot 10^3 - 60,9 \cdot 10^3 \quad \text{soit} \quad \boxed{P_T = 79,1 \text{ kW}}$$

$$Q_T = Q + Q_1 = 86,5 \cdot 10^3 + 52,9 \cdot 10^3 \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_T = 139 \text{ kVAR}}$$

Comme on néglige la puissance déformante, le facteur de puissance se calcule simplement par $f = \frac{P_T}{\sqrt{P_T^2 + Q_T^2}}$,

d'où, avec les puissances exprimées en kW et en kVAR, $f = \frac{79,1}{\sqrt{79,1^2 + 139^2}}$, soit $\boxed{f = 0,495}$

d) Mêmes calculs sans transformateur – Conclusion

Comme dit dans l'énoncé, il suffit de donner à m' la valeur 1. Tous calculs faits, on obtient:

$$\boxed{\alpha = 111^\circ \quad P_1 = -60,7 \text{ kW} \quad Q_1 = 158 \text{ kVAR} \quad P_T = 79,3 \text{ kW} \quad Q_T = 245 \text{ kVAR} \quad f = 0,305}$$

L'utilisation d'un transformateur permet donc d'améliorer le facteur de puissance. Ceci est dû à ce que l'abaissement de la tension d'alimentation du pont redresseur permet, pour un même point de fonctionnement du moteur, d'obtenir un angle de retard à l'amorçage plus élevé, donc une valeur plus faible de puissance réactive consommée par le pont redresseur (rappel: $Q_1 = P_1 \tan \alpha$ avec P_1 constant ici).

Remarque 1: En toute rigueur, on devrait retrouver la même valeur de P_1 dans les deux cas. La différence provient des arrondis.

Remarque 2: Si on veut tenir compte de la puissance déformante dans le calcul de f, il faut reprendre l'expression de base $f = P_T / 3V I_L$ où I_L est la valeur efficace totale du courant en ligne. Pour déterminer celle-ci, on peut partir de la relation $I_L = \sqrt{I_{Lf}^2 + I_{Lh}^2}$ (Cf. cours sur les développements en série de Fourier), avec I_{Lf} , valeur efficace du fondamental et I_{Lh} , valeur efficace de l'ensemble des harmoniques.

– I_{Lf} vaut $\frac{\sqrt{P_T^2 + Q_T^2}}{3V}$ (déduit de $P_T = 3V I_{Lf} \cos \phi_f$ et de $Q_T = 3V I_{Lf} \sin \phi_f$, avec ϕ_f , déphasage entre V et I_{Lf})

– Les harmoniques de ce courant étant uniquement ceux générés par le pont redresseur, I_{Lh} s'obtient par

$$I_{Lh} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} m' I_C \right)^2 - \frac{P_1^2 + Q_1^2}{(3V)^2}} \quad \text{(Cf. deux relations ci-dessus et le calcul usuel qui donne } \sqrt{\frac{2}{3}} m' I_C \text{ pour la}$$

valeur efficace du courant i_R).

A titre d'exemple, dans le cas du c), il vient $I_{Lf} = 243 \text{ A}$, $I_{Lh} = 38,7 \text{ A}$, $I_L = 246 \text{ A}$ et $f = 0,489$. La différence sur ce dernier terme est donc minime (on peut aussi remarquer que I_{Lh} est petit devant I_f), ce qui justifie l'approximation faite.

e) Expression numérique de g

$$\begin{cases} mgU_0 + m'U_0 \cos \alpha = R I_C \\ C = \frac{mU_0}{\Omega_s} I_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = \frac{R I_C}{mU_0} - \frac{m'}{m} \cos \alpha \\ I_C = \frac{\Omega_s}{mU_0} C \end{cases} \quad \text{soit, numériquement,} \quad \begin{cases} g = \frac{0,08}{0,826 \cdot 513} I_C - \frac{0,477}{0,826} \cos \alpha \\ I_C = \frac{50\pi}{0,826 \cdot 513} C \end{cases}$$

dont on tire, après remplacement de I_C , et achèvement des calculs $\boxed{g = -0,578 \cos \alpha + 7 \cdot 10^{-5} C}$

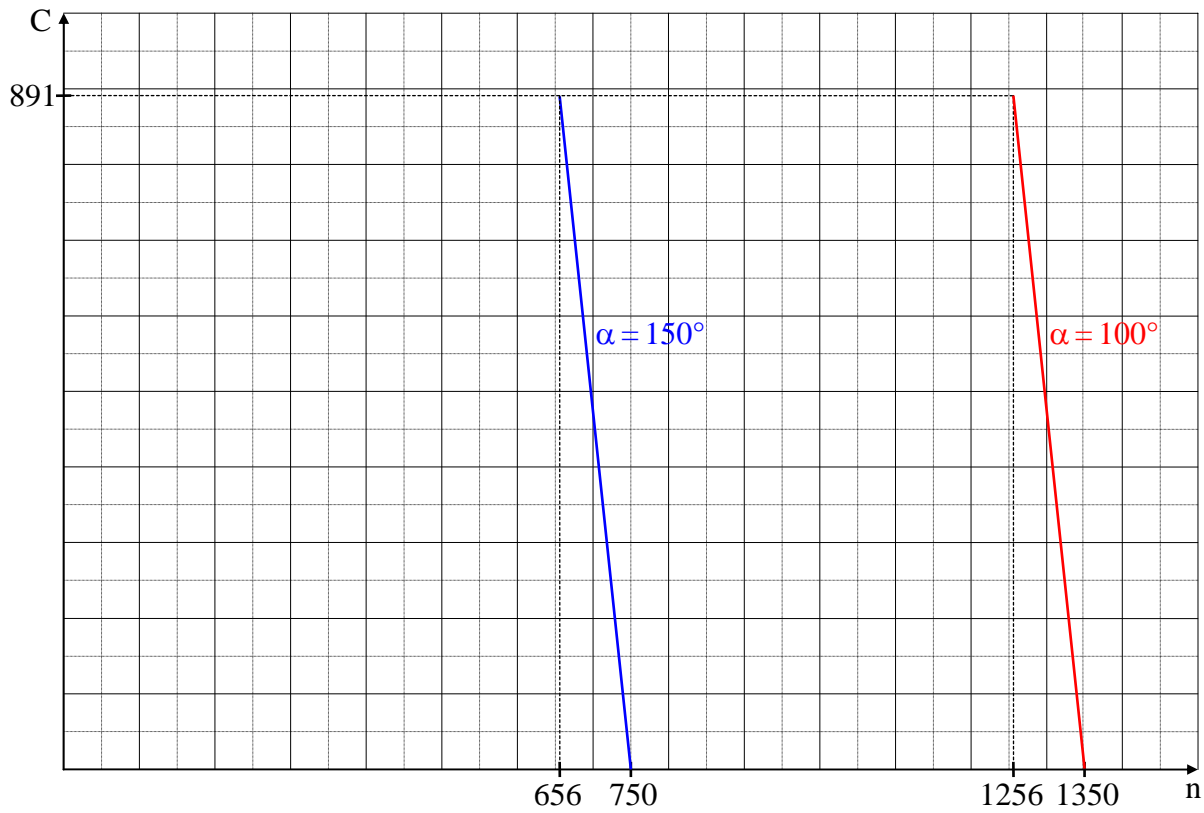
Application numérique

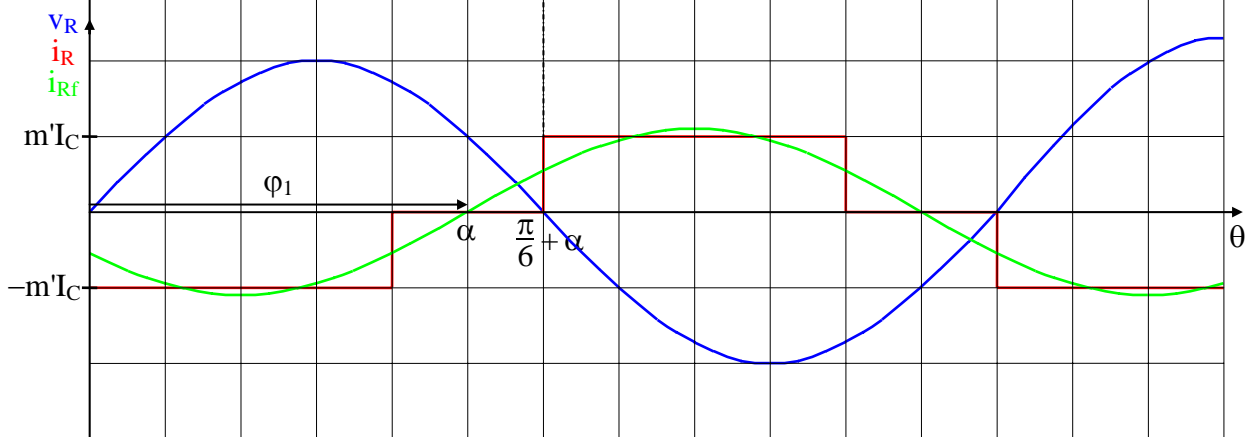
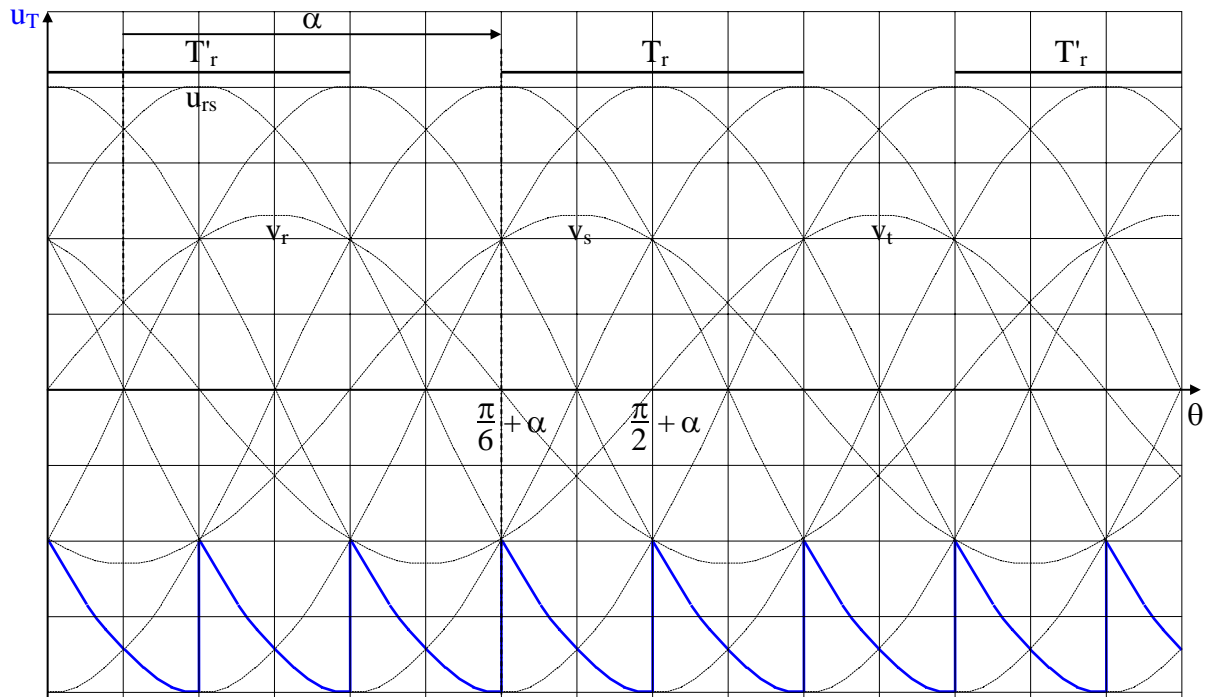
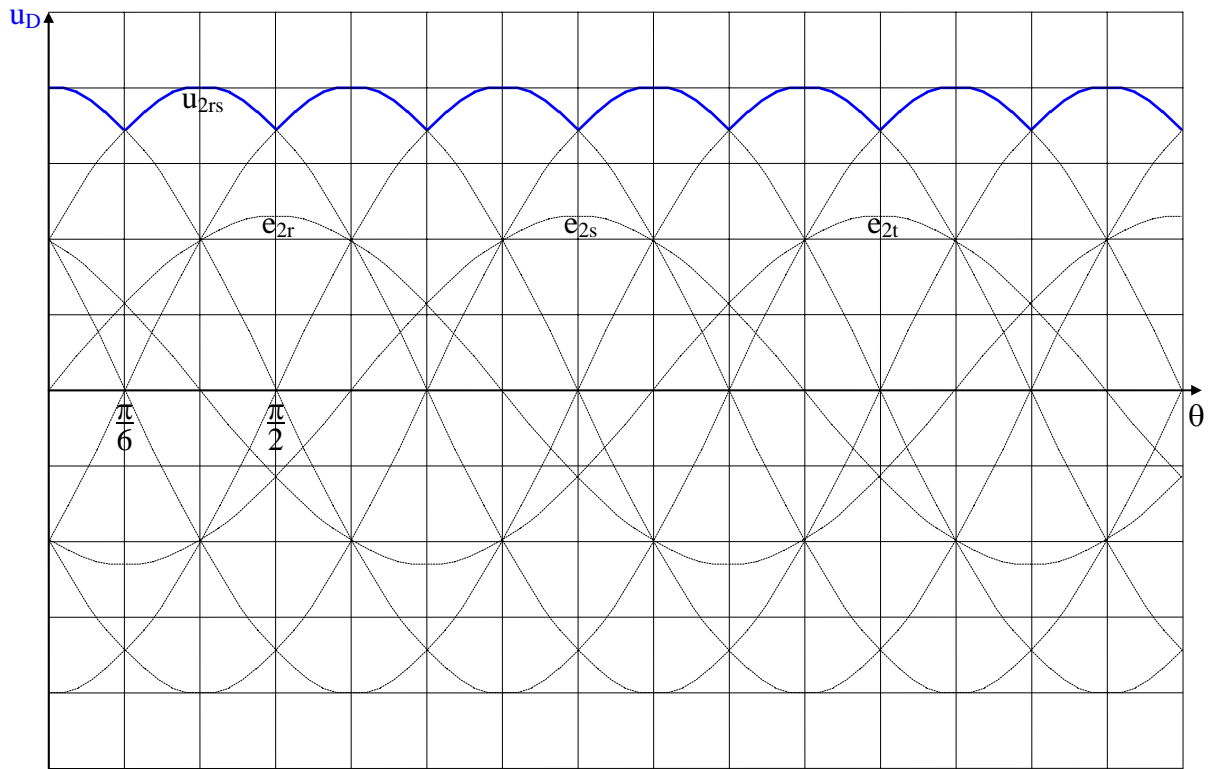
$\alpha = 100^\circ$	C(Nm)	0	891
	g	0,1	0,163
	n(tr/min)	1350	1256

$\alpha = 150^\circ$	C(Nm)	0	891
	g	0,5	0,563
	n(tr/min)	750	656

Tracé des caractéristiques

n est une fonction linéaire de g , lui-même fonction linéaire de C . A α constant, les caractéristiques $C = f(n)$ sont donc des droites, dont il suffirait de déterminer deux points pour les tracer. Ceci ayant été fait ci-dessus, le tracé est immédiat. On peut simplement noter que les droites obtenues sont parallèles.





I)1)a) Calcul des grandeurs – Conclusion

$$g = 1 - n/n_s \quad n_s = 60f/p = 60 \cdot 50/2 = 1500 \text{tr/min} \Rightarrow g = 1 - 1440/1500 = 0,04.$$

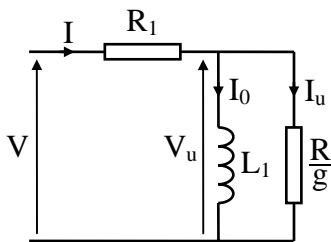
$$\text{On en déduit } g\omega = 0,04 \cdot 2\pi 50 \quad \text{soit} \quad \boxed{g\omega = 12,6 \text{rad/s}}$$

$$R/g = 1,8/0,04 \quad \text{soit} \quad \boxed{R/g = 45 \Omega}$$

$$|R/g + j\omega| = |45 + j20 \cdot 10^{-3} \cdot 100\pi|, \text{ soit} \quad \boxed{|R/g + j\omega| = 45,4 \Omega}$$

$|R/g + j\omega|$ est donc très proche de R/g , ce que l'on peut aussi traduire par $R \gg l g \omega$. Comme $g\omega$ est toujours inférieur ou égal à la valeur utilisée pour le calcul, on en déduit qu'on peut négliger l'influence de l (l'argument de $R/g + j\omega$ au point nominal vaut $7,9^\circ$ et ne serait donc pas négligeable dans un contexte de calcul de déphasages, ce qui explique la restriction de l'approximation aux calculs portant sur les modules).

b) Schéma simplifié



Compte tenu de ce qui précède, on l'obtient en supprimant l du schéma initial (Cf. ci-contre).

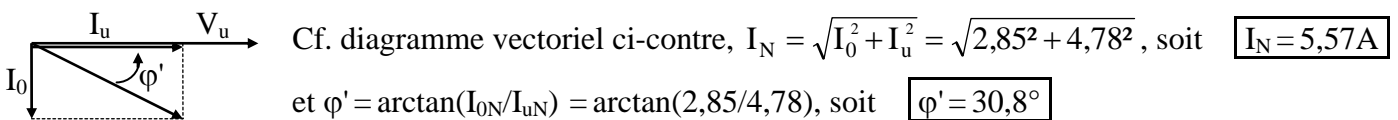
2)a) Calcul de I_{0N} et de I_{uN}

$$I_{0N} = \frac{V_u}{L_1 \omega} = \frac{215}{0,24 \cdot 100\pi} \Rightarrow \boxed{I_{0N} = 2,85 \text{A}}$$

$$I_{uN} = \frac{V_u}{R/g} = \frac{215}{45} \Rightarrow \boxed{I_{uN} = 4,78 \text{A}}$$

b) Calcul de I_N

$V_u = jL_1 \omega I_0 = (R/g) I_u$ entraîne que $\arg(I_u) = \pi/2 + \arg(I_0)$, donc que ces deux courants sont en quadrature.



c) Calcul de la puissance électromagnétique et de C_N

$$P_{eN} = 3(R/g) I_{uN}^2 = 3 \cdot 45 \cdot 4,78^2 \Rightarrow \boxed{P_{eN} = 3085 \text{W}}$$

$$C_N = P_{eN}/\Omega_s = 3085/(100\pi/2) \Rightarrow \boxed{C_N = 19,6 \text{Nm}}$$

d) Calcul de la puissance absorbée et du facteur de puissance

Comme les pertes fer sont négligées, la puissance absorbée, notée P ici, est simplement égale à la puissance électromagnétique augmentée des pertes Joule statoriques. On a donc $P = 3R_1 I_N^2 + P_{eN} = 3 \cdot 1 \cdot 5,57^2 + 3085$, soit

$$\boxed{P = 3178 \text{W}}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{3178}{3 \cdot 220 \cdot 5,57} \quad \text{soit} \quad \boxed{\cos \varphi = 0,864}$$

e) Calcul de Φ_N

$$\Phi_N = L_1 I_{0N} = 0,24 \cdot 2,85 \Rightarrow \boxed{\Phi_N = 0,684 \text{Wb}}$$

3)a) Expression de V_u

$$V_u = L_1 \omega I_0 = \Phi \omega \quad \Phi = \Phi_N \Rightarrow$$

$$\boxed{V_u = \Phi_N \omega}$$

b) Expression de C

$$\begin{cases} P_e = 3 \frac{R}{g} I_u^2 \\ V_u = \Phi_N \omega = \frac{R}{g} I_u \end{cases} \Rightarrow P_e = 3 \frac{R}{g} \left(\frac{g \Phi_N \omega}{R} \right)^2. \text{ D'autre part, } C = p P_e / \omega. \text{ On a donc } C = p 3 \frac{R}{g} \left(\frac{g \Phi_N \omega}{R} \right)^2 / \omega, \text{ soit}$$

$$\boxed{C = \frac{3p \Phi_N^2}{R} g \omega}$$

c) Expressions de I et de V

$$\underline{I} = I_0 + \underline{I}_u = \frac{V_u}{jL_1 \omega} + \frac{V_u}{R/g} = \Phi_N \omega \left(\frac{1}{jL_1 \omega} + \frac{g}{R} \right) \text{ soit } \boxed{\underline{I} = \Phi_N \left(\frac{g \omega}{R} + \frac{1}{jL_1} \right)}$$

$$\underline{V} = R \underline{I} + V_u$$

$$\boxed{\underline{V} = R \underline{I} + \Phi_N \omega}$$

d) Valeurs communes de $g\omega$ et de I

Dans l'expression de C, p, Φ_N et R sont constants, $g\omega$ ne dépend donc que de C. Comme \underline{I} ne fait intervenir que des constantes et $g\omega$, le courant ne dépend également que de C. Comme on considère un fonctionnement à $C = C_N$ constant, les valeurs de $g\omega$ et de I sont celles obtenues au I):

$$\boxed{g\omega = 12,56 \text{ rad/s}}$$

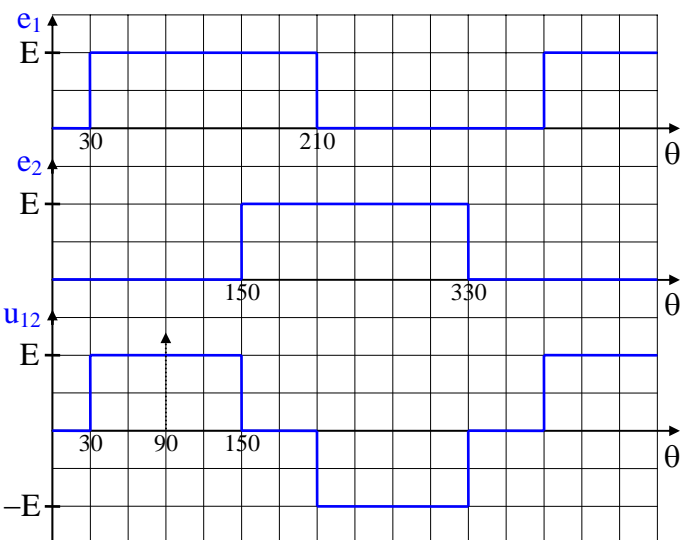
$$I = [I_N; -\varphi'] \text{ soit } \boxed{\underline{I} = [5,57; -30,8]^\circ}$$

Valeurs de V

Numériquement, $\underline{V} = 1 \cdot [5,57; -30,8] + 0,684 \cdot 2\pi f = [5,57; -30,8] + 4,3f$. Pour une simple loi $V/f = C^{te}$, donc V de la forme k·f, on calcule k en s'imposant que $V = 220V$ pour 50Hz, ce qui donne $k = 4,4V/Hz$. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous (V_{simple} correspond au calcul avec $V/f = C^{te}$).

f(Hz)	2	25	50
V(V)	13,7	112	220
$V_{simple}(V)$	8,8	110	220

II)1)a) Allures de e_1 , e_2 et u_{12}



Cf exercices sur les onduleurs, $e_1 = E$ lorsque T_1 est commandé à l'état passant et 0 sinon, e_2 est décalé de 1/3 de période vers la droite et u_{12} , égal à $e_1 - e_2$, se déduit des courbes précédentes.

b) Décomposition en série de Fourier

Les angles n'intervenant qu'au sein de fonctions trigonométriques, on peut raisonner en degrés ici. A noter également que la restriction à un quart de période pour le calcul des coefficients est permise par les différentes symétries que présente la courbe, en particulier, celle verticale par rapport à 90° .

$$C_m = \left| \frac{4}{\pi} \int_0^{90} u_{12}(\theta) \sin(m\theta) d\theta \right| = \left| \frac{4}{\pi} \int_{30}^{90} E \sin(m\theta) d\theta \right| = \frac{4E}{\pi m} |\cos(m30) - \cos(m90)|. \text{ Comme } m \text{ est impair, } \cos(m90)$$

est nul quel que soit m. Il reste donc

$$C_m = \frac{4E}{\pi m} |\cos(m30)|$$

Expressions de U_m et de V_m

Les harmoniques étant des fonctions sinusoïdales, on a $U_m = C_m / \sqrt{2}$. D'autre part, on peut montrer qu'ils constituent des réseaux triphasés équilibrés, V_m est donc simplement égal à $U_m / \sqrt{3}$. D'où:

$$U_m = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi m} |\cos(m30)| \quad V_m = \frac{2\sqrt{2}E}{\sqrt{3}\pi m} |\cos(m30)|$$

c) Application numérique

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}E}{\sqrt{3}\pi} |\cos(30)| \Rightarrow E = \frac{\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{2}|\cos(30)|} V_1 = 2,22 \cdot 220 \text{ soit } \boxed{E = 489V}$$

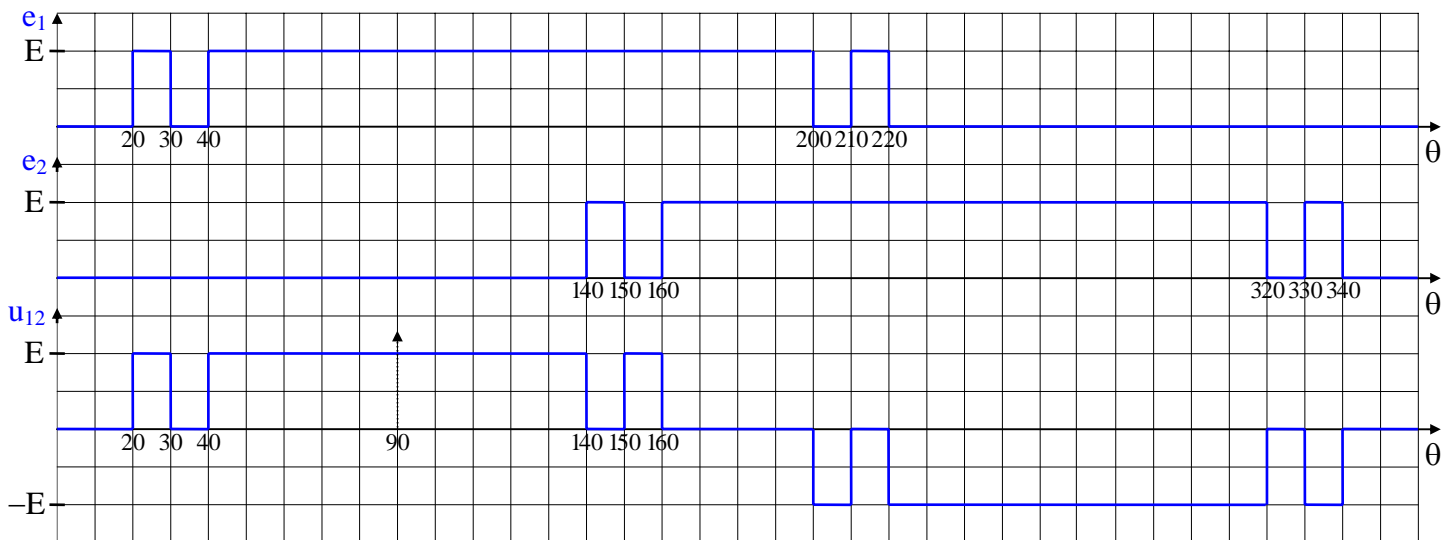
$$V_m = \frac{2\sqrt{2} \cdot 489}{\sqrt{3}\pi m} |\cos(m30)| = \frac{254}{m} |\cos(m30)|. \text{ Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.}$$

m	3	5	7	9	11	13	15
$V_m(V)$	0	44	31,4	0	20	16,9	0

On retrouve évidemment le fait que les harmoniques multiples de 3 sont nuls.

2a) Allures de e_1, e_2 et u_{12} – Nouvelles expressions de U_m et de V_m

Toutes les démarches sont les mêmes qu'au 1). On se contentera donc de donner les résultats.



$$C_m = \left| \frac{4}{\pi} \left(\int_{20}^{30} E \sin(m\theta) d\theta + \int_{40}^{90} E \sin(m\theta) d\theta \right) \right| = \frac{4E}{\pi m} |\cos(m20) - \cos(m30) + \cos(m40) - \cos(m90)| \text{ soit, finalement,}$$

$$C_m = \frac{4E}{\pi m} |\cos(m20) - \cos(m30) + \cos(m40)|$$

$$U_m = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi m} |\cos(m20) - \cos(m30) + \cos(m40)| \quad V_m = \frac{2\sqrt{2}E}{\sqrt{3}\pi m} |\cos(m20) - \cos(m30) + \cos(m40)|$$

b) Application numérique

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}E}{\sqrt{3}\pi} |\cos(20) - \cos(30) + \cos(40)| \Rightarrow E = \frac{\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{2}|\cos(20) - \cos(30) + \cos(40)|} V_1 = 2,29 \cdot 220$$

soit $E = 504V$

$$V_m = \frac{2\sqrt{2} \cdot 504}{\sqrt{3}\pi m} |\cos(m20) - \cos(m30) + \cos(m40)| = \frac{262}{m} |\cos(m20) - \cos(m30) + \cos(m40)| \text{ Cf. tableau ci-dessous.}$$

m	3	5	7	9	11	13	15
V _m (V)	0	13	10,2	0	34,7	39,9	0

De même, les harmoniques multiples de 3 sont nuls.

c) On constate effectivement que les harmoniques jusqu'au rang 7 (donc bien de l'ordre de 2n, soit 6) sont atténués et que les suivants sont amplifiés. Ceci est un effet caractéristique du découpage.

3)a) A priori, avec n=9, tous les harmoniques jusqu'au rang voisin de 18 doivent être fortement atténués. Comme il n'existe pas d'harmoniques pairs et d'harmoniques multiples de trois, on doit donc s'attendre à trouver les harmoniques 19, 23 et 25.

b) Calcul de α, V₂₃ et V₂₅

$$V_1 = \alpha V_{t1} = \alpha 250 \text{ avec } V_1 = 220V \text{ entraîne } \alpha = 220/250, \text{ soit } \alpha = 0,88$$

$$V_{23} = \alpha V_{t23} = 0,88 \cdot 56 \Rightarrow V_{23} = 49,3V \quad V_{25} = \alpha V_{t25} = 0,88 \cdot 66 \Rightarrow V_{25} = 58,1V$$

III)1)a) Valeurs de V₁ et de I₁

Cf. énoncé, ce sont celles trouvées au I), soit $V_1 = 220V \quad I_1 = 5,57A$

b) Expression numérique de Z_m

$$\begin{cases} \underline{Z}_m = R_1 + j\omega L + R \\ \omega = m2\pi f_N \end{cases} \Rightarrow \underline{Z}_m = 1 + 1,8 + j0,02 \cdot m \cdot 100\pi \text{ soit } \underline{Z}_m = 2,8 + j6,28m$$

Valeurs des courants

$$I_m = \frac{V_m}{Z_m} \quad I = \sqrt{I_1^2 + \sum I_m^2} = \sqrt{5,57^2 + \sum I_m^2} . \text{ Les résultats figurent dans les tableaux ci-dessous.}$$

Onde rectangulaire		
m	5	7
V _m (V)	44	31,4
Z _m (Ω)	31,5	44,1
I _m (A)	1,40	0,71
I(A)	5,79	

MLI		
m	23	25
V _m (V)	49	58
Z _m (Ω)	144	157
I _m (A)	0,34	0,37
I(A)	5,59	

On constate que, dans le premier cas, I est un peu supérieur au courant nominal de la machine. En toute rigueur il faudrait donc la déclasser légèrement. Par contre, pour la MLI, ce problème ne se pose pas. En dehors de la réduction des harmoniques de couple, c'est un des autres avantages de ce procédé.

2)a) Valeurs de α

$\alpha = \frac{V_1}{V_{11}} = \frac{V_1}{250}$ où V_1 prend les valeurs obtenues au I)3)d), soit 112V pour 25Hz et 13,7V pour 2Hz. D'où

$$\boxed{f = 25\text{Hz}: \alpha = 0,448 \quad f = 2\text{Hz}: \alpha = 0,055}$$

Valeur de la fréquence maximale de fonctionnement

Si on néglige la chute de tension dans R_1 , on a $V_1 = \Phi_N \omega = \Phi_N 2\pi f$. Comme V_1 est limité à 250V, la fréquence maximale f_{\max} vaut $250/(2\pi\Phi_N) = 250/(2\pi \cdot 0,684)$, soit $\boxed{f_{\max} = 58,2\text{Hz}}$

b) Relation entre les grandeurs

$$\begin{cases} C = \frac{3p\Phi_N^2}{R} g\omega \\ g = 1 - \frac{n}{n_s} \\ n_s = \frac{60f}{p} \\ \omega = 2\pi f \end{cases} \Rightarrow C = \frac{3p\Phi_N^2}{R} \left(1 - \frac{n}{\frac{60f}{p}} \right) 2\pi f \quad \text{soit} \quad \boxed{C = \frac{6\pi p\Phi_N^2}{R} \left(f - \frac{pn}{60} \right)}$$

c) Expression numérique de f

$$C = \frac{6\pi p\Phi_N^2}{R} \left(f - \frac{pn}{60} \right) \Rightarrow f = \frac{pn}{60} + \frac{RC}{6\pi p\Phi_N^2} = \frac{2n}{60} + \frac{1,8 \cdot C}{6\pi \cdot 2 \cdot 0,684^2}, \text{ soit, finalement, } \boxed{f = \frac{n}{30} + 0,102C}$$

A.N.: $n=750\text{tr/min} \Rightarrow f = 750/30 + 0,102C = 25 + 0,102C$, d'où, sachant qu'à vide, comme on néglige les pertes mécaniques, $C=0$,

$$\boxed{\text{à vide: } f = 25\text{Hz} \quad C = C_N: f = 27\text{Hz}}$$

I)1) Expressions de $I_{\cos\alpha}$ et de $I_{\sin\alpha}$

$$\begin{cases} i_a = \sqrt{\frac{2}{3}} I_d \cos\theta - \sqrt{\frac{2}{3}} I_q \sin\theta \\ i_a = I\sqrt{2} \cos(\theta + \alpha) = I\sqrt{2} \cos\theta \cos\alpha - I\sqrt{2} \sin\theta \sin\alpha \end{cases}$$

entraîne par identification des coefficients de $\cos\theta$ et de

$$\sin\theta, \quad \sqrt{\frac{2}{3}} I_d = I\sqrt{2} \cos\alpha \quad \sqrt{\frac{2}{3}} I_q = I\sqrt{2} \sin\alpha \quad \text{soit} \quad \boxed{I \cos\alpha = \frac{I_d}{\sqrt{3}} \quad I \sin\alpha = \frac{I_q}{\sqrt{3}}}$$

2) Expressions de i_b et de i_c

Il suffit de remplacer θ respectivement par $\theta - 2\pi/3$ et $\theta - 4\pi/3$, soit

$$\boxed{i_b = I\sqrt{2} \cos(\theta - 2\pi/3 + \alpha) \quad i_c = I\sqrt{2} \cos(\theta - 4\pi/3 + \alpha)}$$

3) Expression de θ et de i_a

$$\Omega(t) = a \cdot t \Rightarrow \omega(u) = \frac{1}{\tau_r} \frac{I_d}{I_q} + p \cdot a \cdot u. \text{ On a donc } \theta = \int_0^t \left(\frac{1}{\tau_r} \frac{I_q}{I_d} u + p \cdot a \cdot u \right) du, \text{ soit } \boxed{\theta = \frac{1}{\tau_r} \frac{I_q}{I_d} t + p \cdot a \frac{t^2}{2}}$$

Ceci, remplacé dans l'expression de i_a , donne

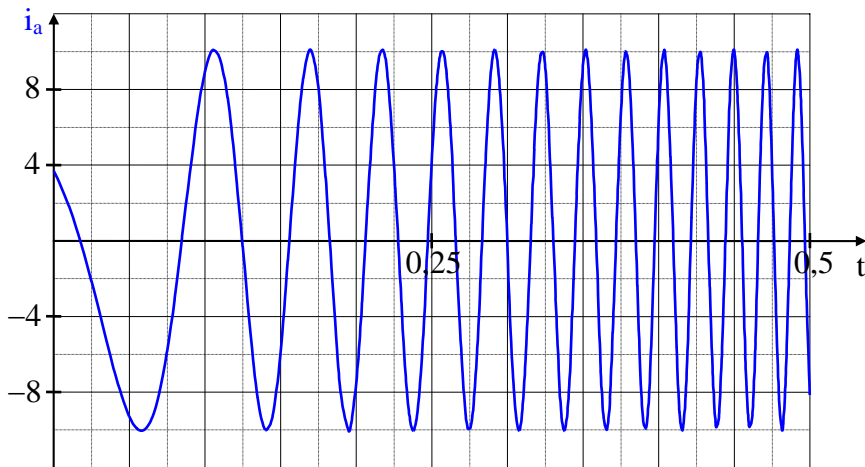
$$\boxed{i_a = I\sqrt{2} \cos\left(\frac{1}{\tau_r} \frac{I_q}{I_d} t + p \cdot a \frac{t^2}{2} + \alpha\right)}$$

Application numérique

$$\begin{cases} I \cos\alpha = \frac{4,5}{\sqrt{3}} \\ I \sin\alpha = \frac{11,5}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I = 7,13A \quad \alpha = 1,2\text{rad}}$$

N.B.: Le résultat s'obtient quasi instantanément si on remarque que $I \cos\alpha$ et $I \sin\alpha$ peuvent être considérés comme les composantes cartésiennes du nombre complexe de composantes polaires I et α . Partant de là, il suffit de faire la conversion à la calculatrice.

$$i_a = 7,13\sqrt{2} \cos\left(\frac{1}{0,16} \frac{4,5}{11,5} t + 2 \cdot 300 \frac{t^2}{2} + 1,2\right) \text{ soit } \boxed{i = 10,1 \cos(16t + 300t^2 + 1,2)}$$



L'allure de i (Cf. ci-contre) s'obtient sans difficulté. Il faut simplement faire attention à ce que la calculatrice soit en mode "radians".

II)1) Si Ω est constant, ω l'est également puisque les autres éléments qui composent ce terme le sont. L'angle θ est donc égal à ωt . Ceci donne des courants d'équation $i_a = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha)$, $i_b = I\sqrt{2} \cos(\omega t - 2\pi/3 + \alpha)$ et $i_c = I\sqrt{2} \cos(\omega t - 4\pi/3 + \alpha)$, qui sont bien les expressions correspondant à un système triphasé équilibré direct.

2) Expressions de I_0 et de I_u – Déphasage entre i_0 et i_u

Les deux courants étant sinusoïdaux, leur valeur efficace est donc simplement égale à la valeur crête divisée par $\sqrt{2}$, soit $I_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} I_d / \sqrt{2}$ et $I_u = \sqrt{\frac{2}{3}} I_q / \sqrt{2}$. On a donc $I_0 = \frac{I_d}{\sqrt{3}}$ $I_u = \frac{I_q}{\sqrt{3}}$

N.B.: En fait, ce sont les termes $I \cos \alpha$ et $I \sin \alpha$ définis plus haut.

Les courants peuvent encore s'écrire $i_0 = I_0 \sqrt{2} \cos \theta$ et $i_u = -I_u \sqrt{2} \sin \theta = I_u \sqrt{2} \cos(\theta + \pi/2)$. En particulier, i_0 est maximum pour $\theta = 0$ et i_u l'est pour $\theta = -\pi/2$, ce qui montre bien que i_u est en avance de $\pi/2$ par rapport à i_0 .

3)a) Calcul des grandeurs au point nominal

Pour faciliter les calculs, on note Z_1 l'impédance équivalente à la mise en série de R_1 et de L_1 , et Y_2 l'admittance équivalente à la mise en parallèle de L_2 et de R_2/g . On aura donc, en particulier, $Z = Z_1 + 1/Y_2$.

$$g = 1 - n/n_s \text{ avec } n_s = 60f_N/p = 60 \cdot 50/2 = 1500 \text{tr/min} \Rightarrow g = 1 - 1425/1500 = 0,05$$

$$Z_1 = R_1 + jL_1\omega = 1 + j0,025 \cdot 100\pi = [7,92; 82,7^\circ]$$

$$Y_2 = \frac{g}{R_2} + \frac{1}{jL_2\omega} = \frac{0,05}{1,4} + \frac{1}{j0,225 \cdot 100\pi} = [0,0384; -21,6^\circ]$$

$$Z = [7,92; 82,7] + 1/[0,0384; -21,6] \Rightarrow Z = [30,7; 34,7^\circ]$$

$$I = \frac{V}{Z}. \text{ Avec } V \text{ comme origine, il vient } I = \frac{380/\sqrt{3}}{[30,7; 34,7]}, \text{ soit } I = [7,15; -34,7^\circ]$$

$$V_u = I/Y_2 = [7,15; -34,7]/[0,0384; -21,6] \Rightarrow V_u = [186; -13,1^\circ]$$

$$V_u = 186V \Rightarrow I_{0N} = 186/(0,225 \cdot 100\pi) \text{ soit } I_{0N} = 2,64A$$

$$C = \frac{P_e}{\Omega_s} = \frac{pP_e}{\omega}. P_e \text{ peut, ici, se calculer par } P - 3R_1I^2, \text{ avec } P = 3VI \cos \varphi \text{ (} \varphi, \text{ déphasage entre } I \text{ et } V \text{)}. \text{ Compte}$$

$$\text{tenu de ceci, } P_e = 3 \cdot 380/\sqrt{3} \cdot 7,15 \cos 34,7 - 3 \cdot 1 \cdot 7,15^2 = 3716W. C_N = 2 \cdot 3716/(100\pi), \text{ soit } C_N = 23,7Nm$$

b) Expression de I

$V_u = jL_2\omega I_0 = (R_2/g)I_u \Rightarrow \arg(I_u) = \pi/2 + \arg(I_0)$. On retrouve donc bien que I_u est en quadrature avance sur I_0 . Il s'ensuit que, avec I_0 comme origine, I_u s'écrit jI_u . I étant la somme de ces courants, il vient $I = I_0 + jI_u$

c) Expressions de P_e et de C

$$P_e = 3 \frac{R}{g} I_u^2. \text{ Or, } \frac{R_2}{g} I_u = L_2\omega I_{0N}. \text{ On a donc } P_e = 3L_2\omega I_{0N} I_u \quad C_e = \frac{pP_e}{\omega} \Rightarrow C = 3pL_2 I_{0N} I_u$$

$$\text{Si les pertes mécaniques sont négligeables, à vide, le couple correspondant est nul } \Rightarrow A \text{ vide, } I_u = 0$$

Expressions de $g\omega$ et de f

$$\frac{R_2}{g} I_u = L_2\omega I_{0N} \Rightarrow g\omega = \frac{R_2 I_u}{L_2 I_{0N}}$$

Or $g = 1 - n/n_s$ avec $n_s = 60f/p$, et $\omega = 2\pi f$. Il vient $(1 - \frac{n}{60f/p}) 2\pi f = \frac{R_2 I_u}{L_2 I_{0N}}$, soit, tous calculs faits,

$$f = \frac{pn}{60} + \frac{R_2 I_u}{2\pi L_2 I_{0N}}$$

Expression de V

$$\underline{V} = (R_1 + jL_1\omega)\underline{I} + \underline{V}_u \Rightarrow$$

$$\underline{V} = (R_1 + jL_1\omega)\underline{I} + jL_2\omega I_{0N}$$

Application numérique

Dans tous les cas:

$$\underline{I} = 2,64 + jI_u \text{ avec } I_u = \frac{C}{3pL_2I_{0N}} = \frac{C}{3 \cdot 2 \cdot 0,225 \cdot 2,64} = 0,281C$$

$$f = \frac{2 \cdot 1000}{60} + \frac{1,4I_u}{2\pi \cdot 0,225 \cdot 2,64} = 33,3 + 0,375I_u$$

$$U = \sqrt{3} V \text{ avec } \underline{V} = (1 + j0,025 \cdot 2\pi f)\underline{I} + j0,225 \cdot 2\pi f \cdot 2,64 = (1 + j0,157f)\underline{I} + j3,73f$$

Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

	$I_u(\text{A})$	$\underline{I}[\text{A};^\circ]$	$f(\text{Hz})$	$\underline{V}[\text{V};^\circ]$	$U(\text{V})$
à vide	0	[2,64;0]	33,3	[138;88,9]	239
$C = C_N$	6,66	[7,16;68,4]	35,8	[159;103]	275

N.B.1: On retrouve évidemment pour I la même valeur qu'au II)3)a). Par contre, l'argument est différent car on a changé d'origine des phases.

N.B.2: Dans le deuxième cas, l'argument de \underline{V} est supérieur à 90° . Là encore, c'est lié à l'origine choisie. Par contre, le déphasage φ entre \underline{I} et \underline{V} , égal à $\arg(\underline{V}) - \arg(\underline{I})$, soit $103 - 68,4 = 34,6^\circ$, reste bien évidemment compris entre 0 et 90° . En fait, aux erreurs d'arrondis près, on retrouve la valeur du II)3)a) (rappel: avec \underline{V} comme origine, φ est égal à l'opposé de l'argument du courant).

Remarque préliminaire: Dans l'étude usuelle des machines alternatives, on considère la vitesse de rotation Ω en valeur absolue. Ceci permet d'écrire de façon unique les relations entre E_0 et Ω d'une part, et ω et Ω d'autre part. Par contre, dans le contexte de la variation de vitesse, Ω est, a priori, compté algébriquement. Comme les grandeurs électriques sont, elles, forcément positives, il faut alors envisager les deux cas, suivant le signe de Ω . (en particulier, on a $\omega = -p\Omega$ pour Ω négatif). Pour éviter d'avoir à entrer dans ces considérations, et vu que cela n'apporterait rien de plus ici, l'énoncé fait la restriction au cas Ω positif.

I)1)a) Valeur de K

A vide, $V = E_0 \Rightarrow KI_e\Omega = V$ soit $K = \frac{V}{I_e\Omega} = \frac{225}{50 \cdot 150}$ d'où $\boxed{K = 0,03H}$

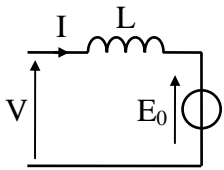
b) Expression de L

En court-circuit, $E_0 = L\omega I$, soit $KI_e\Omega = L\omega I$. Or $\Omega = \omega/p$. On a donc $KI_e\omega/p = L\omega I$, soit $\boxed{L = \frac{KI_e}{pI}}$

Application numérique

$L = \frac{0,03 \cdot 20}{2 \cdot 150}$ soit $\boxed{L = 2mH}$

2)a) Relation en P_e et P – Calcul de C_e



On rappelle ci-contre le schéma équivalent correspondant au modèle utilisé, schéma auquel on se reportera dans toute la suite.

A priori, $P_e = P - p_{js} - p_{fer}$ (pertes Joule statoriques et pertes fer). Comme on néglige ces pertes, on a donc simplement $\boxed{P_e = P}$

$C_e = P_e/\Omega = P_e/(\omega/p)$. Comme $P_e = P$, il vient $C_e = \frac{pP}{\omega} = \frac{2 \cdot 90 \cdot 10^3}{314}$, soit $\boxed{C_e = 573Nm}$

b) Valeurs du déphasage

$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{P}{3VI}\right) = \pm \arccos\left(\frac{90 \cdot 10^3}{3 \cdot 230 \cdot 150}\right) \Rightarrow \boxed{\varphi = \pm 29,6^\circ}$

Valeurs de Q – Etat de la machine

Dans tous les cas, $Q = P \tan \varphi = 90 \cdot 10^3 \tan \varphi$

$\boxed{\varphi = 29,6^\circ} \Rightarrow \boxed{Q = 51,1kVAR}$

$Q > 0 \Rightarrow$ la machine absorbe de la puissance réactive, elle est sous-excité.

$\boxed{\varphi = -29,6^\circ} \Rightarrow \boxed{Q = -51,1kVAR}$

$Q < 0 \Rightarrow$ la machine fournit de la puissance réactive, elle est sur-excité.

Valeurs de E_0 et de J

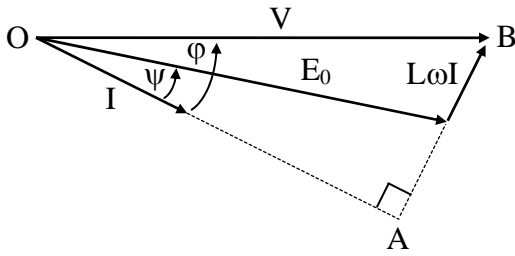
Avec \underline{I} comme origine, on a $\underline{E_0} = [V; \varphi] - jL\omega I$. Numériquement, $\underline{E_0} = [230; \varphi] - j2 \cdot 10^{-3} \cdot 314 \cdot 150 = [230; \varphi] - j94,2$.

D'autre part, $I_e = E_0/K\Omega = E_0/0,03/(314/2) = 0,212 \cdot E_0$. D'où les résultats:

$\boxed{\varphi = 29,6^\circ} \quad E_0 = [201; 5,5^\circ] \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = 201V \quad I_e = 42,6A}$

$\boxed{\varphi = -29,6^\circ} \quad E_0 = [288; -46,1^\circ] \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = 288V \quad I_e = 61,1A}$

3)a) Diagramme vectoriel



Tracé ci-contre, il traduit la relation $\underline{V} = jL\omega\underline{I} + \underline{E}_0$.

b) Relations entre les grandeurs

Cf. diagramme ci-dessus, $OA = V\cos\varphi = E_0\cos\psi$ et $AB = V\sin\varphi = E_0\sin\psi + L\omega I$.

On peut également raisonner en complexes: $\underline{V} = jL\omega\underline{I} + \underline{E}_0$ entraîne, avec \underline{I} comme origine, $[V;\varphi] = jL\omega I + [E_0;\psi]$ soit $V\cos\varphi + jV\sin\varphi = jL\omega I + E_0\cos\psi + jE_0\sin\psi$. Il suffit alors d'égaliser les parties réelles et imaginaires pour retrouver les relations précédentes.

c) Expression de P_e

Cf. 2)a), $P_e = P = 3VI\cos\varphi$. Or $V\cos\varphi = E_0\cos\psi$. On en déduit $P_e = 3E_0\cos\psi I$

N.B.: On parle de "retrouver l'expression de P_e " car il s'agit en fait d'une des relations de base de la machine à pôles lisses.

Mode de fonctionnement

Il dépend du signe de P_e , qui, vu la convention récepteur choisie, est positif en moteur et négatif en génératrice. E_0 et I étant forcément positifs, ce signe ne dépend que de celui de $\cos\psi$. D'où:

$$|\psi| \leq \pi/2 \Rightarrow \cos\psi \geq 0 \Rightarrow P_e \geq 0 \text{ d'où } |\psi| \leq \pi/2: \text{ fonctionnement en moteur}$$

$$|\psi| \geq \pi/2 \Rightarrow \cos\psi \leq 0 \Rightarrow P_e \leq 0 \text{ d'où } |\psi| \geq \pi/2: \text{ fonctionnement en génératrice}$$

Expression de C_e

$$C_e = \frac{P_e}{\Omega} = \frac{3E_0 \cos\psi I}{\Omega}, \text{ soit, en remplaçant } E_0 \text{ par } KI_e\Omega, C_e = \frac{3KI_e\Omega \cos\psi I}{\Omega}, \text{ d'où } C_e = 3KI_e\cos\psi I$$

II)1)a) Intervalles de conduction – Allure de u_2

Tous les tracés de cette partie sont regroupés page suivante. Si nécessaire, on se reportera aux exercices sur le redressement (ou aux cours correspondants) pour des explications complémentaires.

b) Expressions de i_1 – Allure

Cf. schéma du variateur

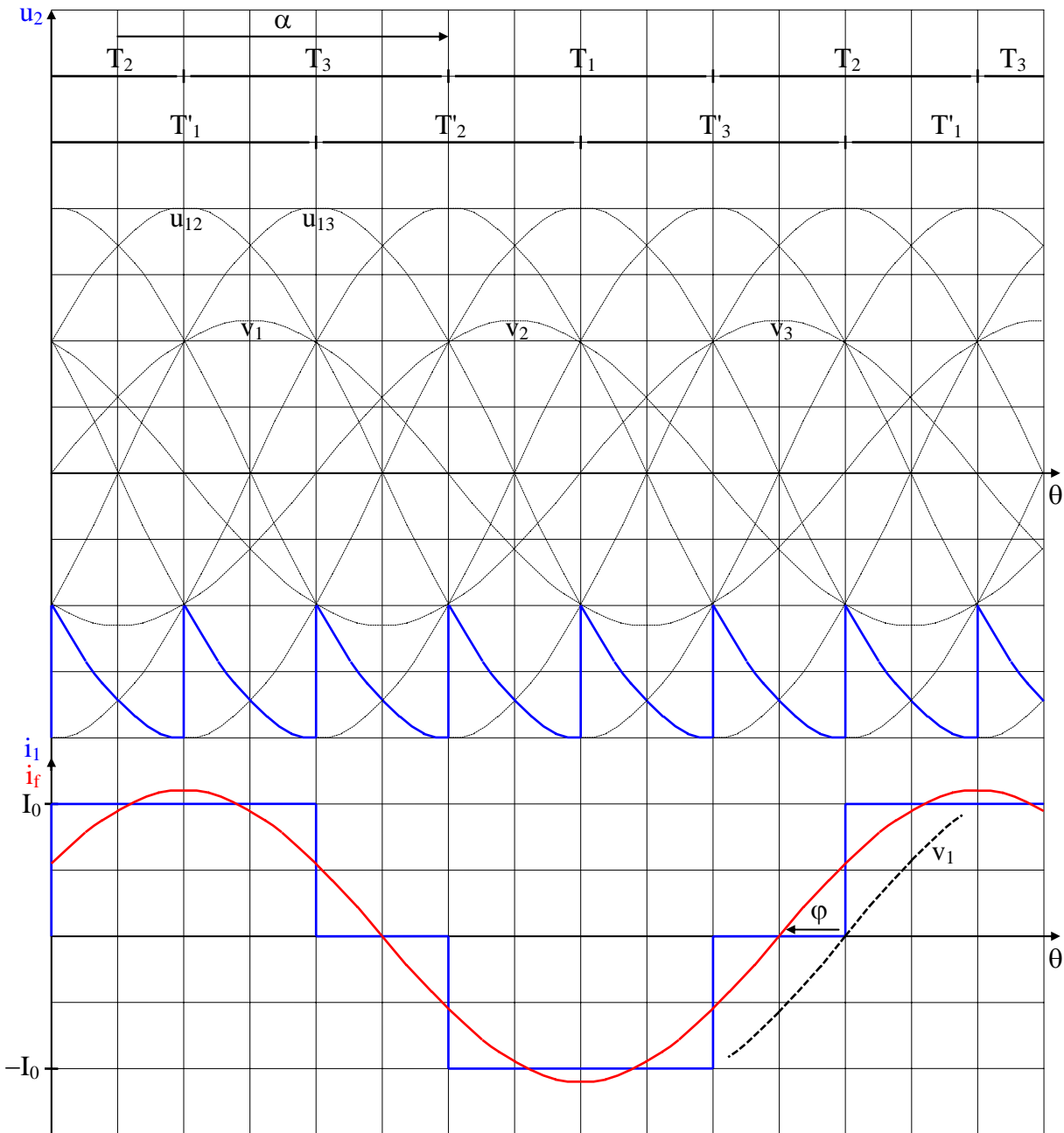
$$i_1 = -I_0 \text{ quand } T_1 \text{ conduit} \quad i_1 = I_0 \text{ quand } T'_1 \text{ conduit} \quad i_1 = 0 \text{ lorsque } T_1 \text{ et } T'_1 \text{ sont bloqués}$$

c) Allure de i_f

Le fondamental est une sinusoïde de même période de i_1 et "centrée" sur ce dernier. On l'a représenté ici avec son amplitude exacte, soit $2\sqrt{3}I_0/\pi = 1,10I_0$.

Valeur de φ

Cf. tracé, $\varphi = -30^\circ$. Comme $\alpha_2 = 150^\circ$, $\alpha_2 - \pi = 150 - 180 = -30^\circ$. La relation est bien vérifiée dans ce cas particulier.



2)a) Expression de U_{2C} en fonction de V et de φ

$$U_{2C} = 2,34V \cos \alpha_2 \quad \varphi = \alpha_2 - \pi \Rightarrow \alpha_2 = \varphi + \pi \quad \text{d'où} \quad U_{2C} = 2,34V \cos(\varphi + \pi) \quad \text{soit} \quad \boxed{U_{2C} = -2,34V \cos \varphi}$$

b) Expression de P

Pour le pont P2, on est en présence d'une convention générateur. La puissance absorbée est donc égale à $-U_{2C}I_0$. D'où, compte tenu de l'expression de U_{2C} , $P = -(-2,34V \cos \varphi)I_0$, soit $\boxed{P = 2,34V \cos \varphi I_0}$

c) Expression de I

$$P = 3VI \cos \varphi \Rightarrow 2,34V \cos \varphi I_0 = 3VI \cos \varphi \quad \text{soit} \quad 2,34I_0 = 3I \quad \text{d'où} \quad I = 2,34/3 \cdot I_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{I \cong 0,780I_0}$$

3) Expressions de U_{1C}

Vu le fléchage des tensions u_1 et u_2 , et le fait que la valeur moyenne de la tension aux bornes de L_1 est nulle, on a $U_{1C} = -U_{2C}$. D'où $\boxed{U_{1C} = 2,34V \cos \varphi}$

Par ailleurs, Cf. D)3)b), on a $V \cos \varphi = E_0 \cos \psi$, d'où $\boxed{U_{1C} = 2,34E_0 \cos \psi}$

III)1) Expressions de C_e et de U_{1C}

$$\begin{cases} C_e = 3KI_e \cos \psi I \\ I = 0,780I_0 \end{cases} \Rightarrow C_e = 3KI_e \cos \psi 0,780I_0 \text{ soit } \boxed{C_e = 2,34KI_e \cos \psi I_0}$$

$$\begin{cases} U_{1C} = 2,34E_0 \cos \psi \\ E_0 = KI_e \Omega \end{cases} \Rightarrow \boxed{U_{1C} = 2,34KI_e \Omega \cos \psi}$$

Valeur de $I_e \cos \psi$ pour le fonctionnement en génératrice

$$I_e \cos \psi = \frac{U_{1C}}{2,34K\Omega} \text{ avec } U_{1C} = 540 \cos 150 = -468V \text{ et } \Omega = 157 \text{ rad/s. D'où } I_e \cos \psi = \frac{-468}{2,34 \cdot 0,03 \cdot 157}, \text{ soit}$$

$$\boxed{I_e \cos \psi = -42,5A}$$

Comme dit, pour le fonctionnement en moteur, on prendra $I_e \cos \psi = 42,5A$.

2) Expression de $I_e \sin \psi$

Cf. I)3)b) $\begin{cases} V \cos \varphi = E_0 \cos \psi \\ V \sin \varphi = E_0 \sin \psi + L\omega I \end{cases}$. On en déduit $\tan \varphi = \frac{E_0 \sin \psi + L\omega I}{E_0 \cos \psi}$, soit, compte tenu de $E_0 = KI_e \Omega$ et de

$$\omega = p\Omega, \tan \varphi = \frac{KI_e \Omega \sin \psi + Lp\Omega I}{KI_e \Omega \cos \psi}, \text{ d'où on tire, tous calculs faits, } \boxed{I_e \sin \psi = I_e \cos \psi \tan \varphi - LpI/K}$$

a) Valeur de $I_e \sin \psi$

En fonctionnement moteur, on a $I_e \cos \psi = 42,5A$. Ceci, reporté dans l'expression de $I_e \sin \psi$, et compte tenu de $\varphi = -30^\circ$, donne $I_e \sin \psi = 42,5 \tan(-30) - 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 150 / 0,03$, soit $\boxed{I_e \sin \psi = -44,5A}$

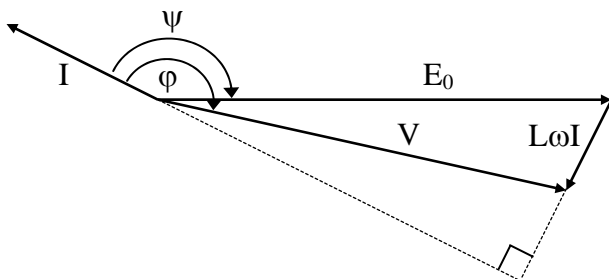
Valeurs de I_e et ψ

$$\begin{cases} I_e \cos \psi = 42,5 \\ I_e \sin \psi = -44,5 \end{cases} \Rightarrow (\text{conversion polaire-cartésien, Cf. exercice précédent}) \quad \boxed{I_e = 61,5A \quad \psi = -46,3^\circ}$$

b) Valeur de ψ

Pour le fonctionnement en génératrice, $I_e \cos \psi = -42,5A$. Comme I_e est supposé constant et égal à la valeur calculée ci-dessus, il vient $\psi = \arccos(-42,5/61,5)$, soit, vu que ψ doit être négatif, $\boxed{\psi = -134^\circ}$

Diagramme vectoriel – Conclusion



Si on part de E_0 , le diagramme s'établit comme indiqué ci-contre. On en déduit que φ est négatif et supérieur en valeur absolue à 134° . Les conditions de commutation naturelle (φ suffisamment négatif), sont donc effectivement d'autant mieux respectées ici.

3) Expressions numériques de C_e et de U_{1C}

Dans tous les cas, $C_e = 2,34 \cdot 0,03 I_e \cos \psi I_0 = 0,0702 I_e \cos \psi I_0$ et $U_{1C} = 2,34 \cdot 0,03 I_e \cos \psi \Omega = 0,0702 I_e \cos \psi \Omega$.

$$\boxed{\text{Fonctionnement en moteur:}} \quad I_e \cos \psi = 42,5A \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_e = 2,98I_0 \quad U_{1C} = 2,98\Omega}$$

$$\boxed{\text{Fonctionnement en génératrice:}} \quad I_e \cos \psi = -42,5A \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_e = -2,98I_0 \quad U_{1C} = -2,98\Omega}$$

a) Analogie avec la machine à courant continu

Si on considère l'ensemble P2 + machine synchrone, on constate qu'il est alimenté sous tension continue U_{1C} et absorbe le courant continu I_0 , la vitesse de rotation étant proportionnelle à U_{1C} et le couple à I_0 . On a donc une analogie formelle avec les relations obtenues dans le cas d'une machine à courant continu. En termes de gestion du fonctionnement dans les quatre quadrants, il faut cependant noter deux différences essentielles par rapport à cette dernière:

- Le courant I_0 est unidirectionnel, le signe du couple est obtenu par action sur l'angle ψ .
- Le signe de la tension n'intervient pas sur le sens de rotation. L'inversion de vitesse s'obtient en modifiant l'ordre d'amorçage des thyristors du pont P2.

Cela étant dit, il n'en reste pas moins qu'on commande de façon indépendante la vitesse et le couple. De plus, par rapport à la machine à courant continu, la machine synchrone présente deux avantages:

- absence de système collecteur-balais (moins d'entretien, utilisation possible en atmosphère explosive)
- meilleure puissance massique (rapport entre la puissance de la machine et son poids).

b) Valeur maximale de I_0 – Valeur correspondante de $|C_e|$

$I_0 = I/0,780$ avec I limité à $I_N = 150A$. On a donc $I_{0max} = 150/0,780$ soit $I_{0max} = 192A$

$$|C_e|_{max} = 2,98 \cdot I_{0max} = 2,98 \cdot 192 \text{ soit } |C_e|_{max} = 572Nm$$

N.B.: On retrouve quasiment la valeur de couple obtenue au D). C'est logique vu que $I = I_N$, que I_e et ψ sont pratiquement les mêmes (du moins pour le fonctionnement en capacitif Cf. D)2)b)) et que C ne dépend que de ces grandeurs (ce que ne montre évidemment pas la relation utilisée au D)2)a), fondée uniquement sur un bilan de puissance).

c) Valeurs communes de I_0 et de f

$$|C_e| = 400Nm \Rightarrow I_0 = 400/2,98 \text{ soit } I_0 = 134A$$

$$f = \omega/2\pi = p\Omega/2\pi = 2 \cdot 100/2\pi \text{ soit } f = 31,8Hz$$

Valeurs de U_{1C} , α_1 et de $P_{rés}$ $P_{rés}$, puissance fournie par le réseau ou restituée à celui-ci.

Dans tous les cas, $U_{1C} = \pm 2,98 \cdot 100 = \pm 298V$, $U_{1C} = 540 \cos \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \arccos(U_{1C}/540) = \arccos(\pm 298/540)$ et $P_{rés} = U_{1C} I_0 = \pm 298 \cdot 134 = \pm 39,9kW$ (le signe + correspondant au fonctionnement en moteur, donc à C_e positif puisque Ω l'est, et le signe – à celui en génératrice, donc à C_e négatif pour la même raison).

$C_e = 400Nm$: $C_e > 0 \Rightarrow$ fonctionnement en moteur, d'où

$$U_{1C} = 298V \quad \alpha_1 = 56,5^\circ \quad P_{rés} = 39,9kW$$

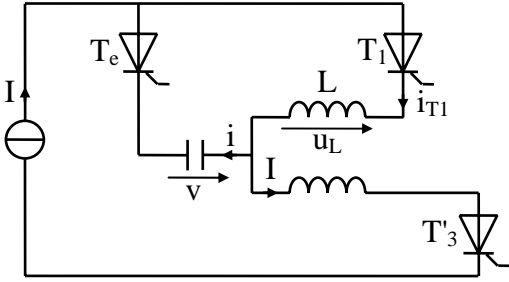
$P_{rés} > 0 \Rightarrow$ puissance fournie.

$C_e = -400Nm$: $C_e < 0 \Rightarrow$ fonctionnement en génératrice, d'où

$$U_{1C} = -298V \quad \alpha_1 = 123^\circ \quad P_{rés} = -39,9kW$$

$P_{rés} < 0 \Rightarrow$ puissance restituée.

1) a) Schéma équivalent



b) Equation différentielle régissant l'évolution de v

Cf. schéma précédent, on a $v + u_L = 0$. D'autre part, $i = C \frac{dv}{dt}$, $u_L = L \frac{di_{T1}}{dt}$ et $i_{T1} = i + I$. On a donc, en particulier, $u_L = L \frac{d(i+I)}{dt} = L \frac{di}{dt}$, soit, compte tenu de la relation entre i et v , $u_L = LC \frac{d^2v}{dt^2}$. Il ne reste plus qu'à reporter

ceci dans la première équation pour obtenir
$$\boxed{LC \frac{d^2v}{dt^2} + v = 0}$$

c) Valeur initiale de i

$i_{T1} = i + I \Rightarrow i = i_{T1} - I$. Comme il y a continuité du courant dans L , on a $i_{T1}(0_-) = i_{T1}(0_+) = I$. Il s'ensuit que $i(0)$, égal à $i_{T1}(0_+) - I$, vaut $I - I$, soit $\boxed{i(0) = 0}$

Expressions de v, i et i_{T1}

$$\begin{cases} LC \frac{d^2v}{dt^2} + v = 0 \\ i = C \frac{dv}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\ i = -\sqrt{\frac{C}{L}} A \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \sqrt{\frac{C}{L}} B \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{cases}$$

$v(0) = V_0 \Rightarrow A = V_0$ $i(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ d'où, compte tenu de $i_{T1} = i + I$,

$$\boxed{v = V_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad i = -\sqrt{\frac{C}{L}} V_0 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad i_{T1} = I - \sqrt{\frac{C}{L}} V_0 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}$$

d) Expression de t_1 et de V_1

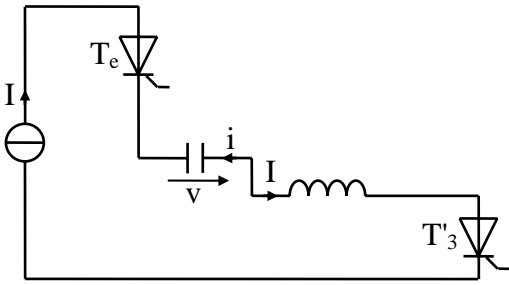
t_1 est tel que $i_{T1}(t_1) = 0$. On a donc $0 = I - \sqrt{\frac{C}{L}} V_0 \sin\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right)$, soit $V_0 \sin\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) = \sqrt{\frac{L}{C}} I$, d'où, finalement,

$$\boxed{t_1 = \sqrt{LC} \arcsin\left(\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{I}{V_0}\right)}$$

$$V_1 = v(t_1) = V_0 \cos\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) = V_0 \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right)} = V_0 \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{I}{V_0}\right)^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_1 = V_0 \sqrt{1 - \frac{L}{C} \frac{I^2}{V_0^2}}}$$

N.B.: Dans la question 3)b), on utilisera les relations intermédiaires $V_0 \sin\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) = \sqrt{\frac{L}{C}} I$ et $V_1 = V_0 \cos\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right)$.

2)a) Schéma équivalent



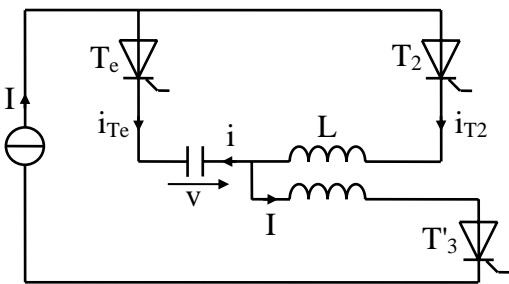
b) Expression de v et de t₂

Cf. schéma ci-dessus, $i = C \frac{dv}{dt} = -I$. On a donc $v = -\frac{I}{C}t + A_I$. Comme on place la nouvelle origine des temps

en t₁, la condition de continuité est $v(0) = V_1$, dont on déduit $A_I = V_1$. D'où $v = -\frac{I}{C}t + V_1$

t₂ est tel que $v(t_2) = -V_1$. On a donc $-V_1 = -\frac{I}{C}t_2 + V_1$, soit $t_2 = \frac{2CV_1}{I}$

3)a) Comparaison entre les schémas – Expressions de v, i, i_{T2} et i_{Te}



Au remplacement de T₁ par T₂ près, le nouveau schéma équivalent (Cf. ci-contre) est le même que celui tracé au 1). Les équations régissant l'évolution de v et i sont donc identiques et leurs solutions ne diffèrent que par la valeur des constantes d'intégration, qu'il faut recalculer compte tenu des nouvelles conditions initiales $v(0) = -V_1$ et $i(0) = i_{T2}(0) - I = -I$ ($i_{T2}(0) = 0$ par continuité du courant dans L).

Il vient donc immédiatement

$$\begin{cases} v = A_2 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\ i = -\sqrt{\frac{C}{L}}A_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \sqrt{\frac{C}{L}}B_2 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{cases}$$

$v(0) = -V_1 \Rightarrow A_2 = -V_1$ $i(0) = -I \Rightarrow B_2 = -\sqrt{\frac{L}{C}}I$. D'où, compte tenu du fait que $i_{T2} = i + I$ et que $i_{Te} = -i$,

$$\begin{cases} v = -V_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) - \sqrt{\frac{L}{C}}I \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) & i = \sqrt{\frac{C}{L}}V_1 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) - I \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\ i_{T2} = I \left[1 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \right] + \sqrt{\frac{C}{L}}V_1 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) & i_{Te} = -\sqrt{\frac{C}{L}}V_1 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + I \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{cases}$$

b) Valeurs de t₃ et de v(t₃)

t₃ est tel que $i_{Te}(t_3) = 0$. On a donc $0 = -\sqrt{\frac{C}{L}}V_1 \sin\left(\frac{t_3}{\sqrt{LC}}\right) + I \cos\left(\frac{t_3}{\sqrt{LC}}\right)$, soit $\tan\left(\frac{t_3}{\sqrt{LC}}\right) = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{I}{V_1}$.

Or, Cf. N.B. du 1)d), on a $V_0 \sin\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) = \sqrt{\frac{L}{C}}I$ et $V_1 = V_0 \cos\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right)$. Ceci entraîne $\tan\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{I}{V_1}$.

L'égalité des deux tangentes implique celle des angles (modulo π , mais ici, seule les valeurs comprises entre 0 et π sont à retenir). Il s'ensuit que $\frac{t_3}{\sqrt{LC}} = \frac{t_1}{\sqrt{LC}}$, d'où $\boxed{t_3 = t_1}$

$$v(t_3) = -V_1 \cos\left(\frac{t_3}{\sqrt{LC}}\right) - \sqrt{\frac{L}{C}} I \sin\left(\frac{t_3}{\sqrt{LC}}\right) = -V_1 \cos\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) - \sqrt{\frac{L}{C}} I \sin\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) \quad (\text{puisque } t_3 = t_1)$$

soit, compte tenu de $V_0 \sin\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) = \sqrt{\frac{L}{C}} I$ et $V_1 = V_0 \cos\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right)$,

$$v(t_3) = -V_0 \cos\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) \cos\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) - V_0 \sin\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) \sin\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) = -V_0 \left[\cos^2\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) + \sin^2\left(\frac{t_1}{\sqrt{LC}}\right) \right]$$

Il vient donc finalement $\boxed{v(t_3) = -V_0}$

N.B.: L'évolution ne pouvant qu'être "symétrique", les valeurs de t_3 et de $v(t_3)$ sont tout à fait logiques.

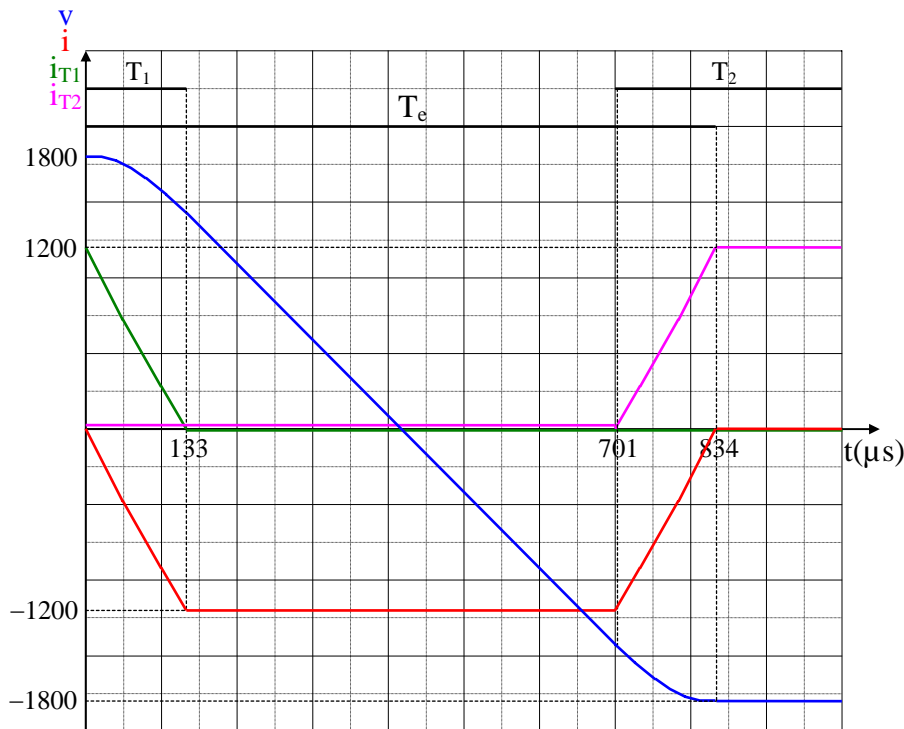
4) Valeurs de t_1 , V_1 et t_2

$$t_1 = \sqrt{LC} \arcsin\left(\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{I}{V_0}\right) = \sqrt{186 \cdot 10^{-6} \cdot 235 \cdot 10^{-6}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{186 \cdot 10^{-6}}{235 \cdot 10^{-6}} \frac{1200}{1800}}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{t_1 = 133 \mu\text{s}}$$

$$V_1 = V_0 \sqrt{1 - \frac{L}{C} \frac{I^2}{V_0^2}} = 1800 \sqrt{1 - \frac{186 \cdot 10^{-6}}{235 \cdot 10^{-6}} \frac{1200^2}{1800^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_1 = 1450 \text{V}}$$

$$t_2 = \frac{2CV_1}{I} = \frac{2 \cdot 235 \cdot 10^{-6} \cdot 1450}{1200} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_2 = 568 \mu\text{s}}$$

Allures de v , i , i_{T1} et i_{T2}

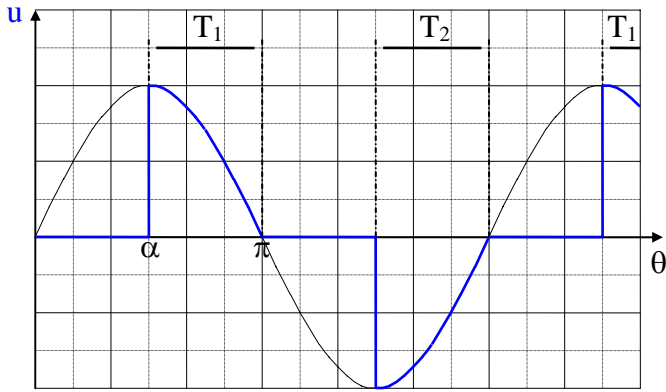


Le tracé ne présente pas de difficultés.

Signalons simplement que:

- Les temps étant à chaque fois calculés avec une nouvelle origine, l'abscisse réelle est la somme du temps correspondant et des temps précédents (ex. $133 + 568 = 701 \mu\text{s}$ pour le début de conduction de T_2).
- Il y a continuité de la pente de $v(t)$ au moment des commutations car on a $dv/dt = I/C$ à gauche et à droite.
- On a fait figurer également les intervalles de conduction des semi-conducteurs concernés (comme dit dans l'énoncé, T_3 conduit pendant toute cette phase).

I)1) Allure de u



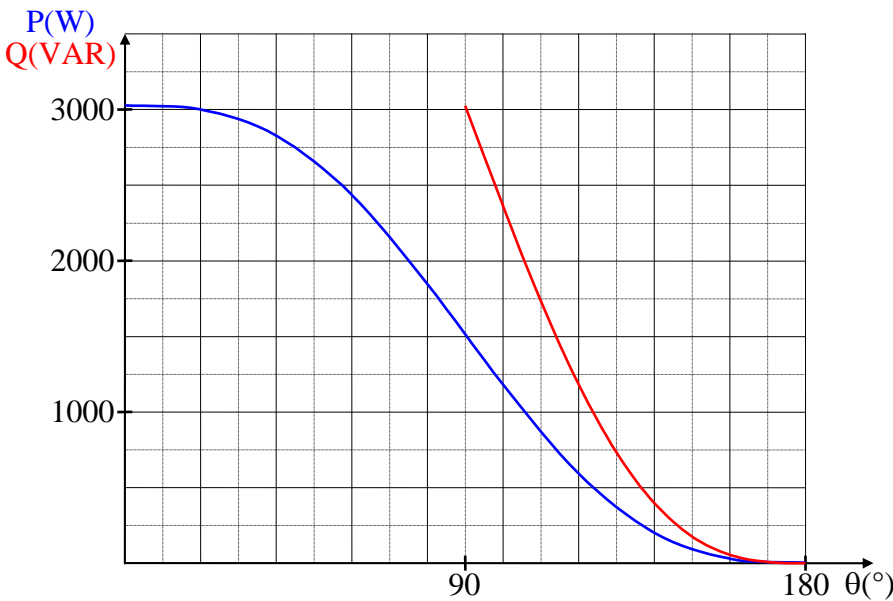
Sur circuit résistif, la durée de conduction de chaque thyristor est égale à $\pi - \alpha$. D'autre part, $u = e$ lorsqu'un thyristor conduit et $u = 0$ sinon. On en déduit le tracé ci-contre.

2) Valeur efficace de u

Les alternances positives et négatives de u étant identiques, on a $U^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} e^2 d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} (E\sqrt{2} \sin\theta)^2 d\theta$, soit

$$U^2 = \frac{E^2}{\pi} \left[\pi - \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right], \text{ d'où, finalement, } \boxed{U = E \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}}}$$

Expression de P – Courbe $P = f(\alpha)$



Sur circuit résistif $P = U^2/R$. Il s'ensuit que

$$\boxed{P = \frac{E^2}{R} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi} \right]}$$

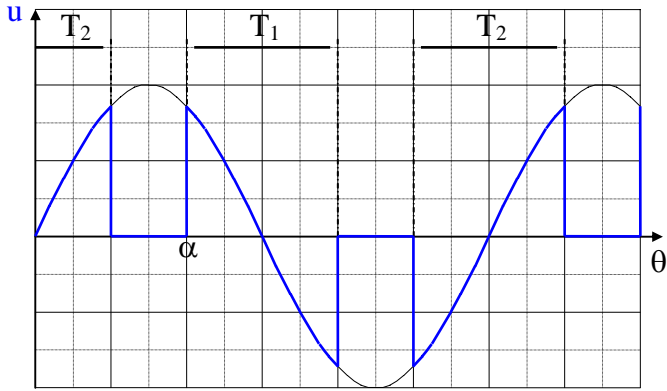
Numériquement, $E^2/R = 220^2/16 = 3025W$, d'où $P = 3025 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi} \right]$ avec α en radians ou $P = 3025 \left[1 - \frac{\alpha}{180} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi} \right]$ si α est en degrés. La courbe est tracée sur la figure ci-contre, où on a représenté également celle, $Q = f(\alpha)$, demandée dans la question II)2)d).

II)1) Valeur de α_0

Cf. étude théorique (voir cours correspondants), $\alpha_0 = \varphi$, déphasage en régime sinusoïdal entre la tension aux bornes de la charge et le courant qui la traverse. Ici, comme le débit s'effectue sur une inductance pure, on a $\varphi = 90^\circ$. Il s'ensuit que $\boxed{\alpha_0 = 90^\circ}$

2)a) Allure de u

Ici, les thyristors s'amorcent à α et conduisent jusqu'à $\alpha + \alpha_1$. Cf. énoncé, $\alpha_1 = 2(180 - 120) = 120^\circ$. Le reste de la démarche est la même que pour le débit sur circuit résistif. La courbe est représentée page suivante.



b) Expressions de P et de Q – Valeur de φ_1

$$P = EI_1 \cos \varphi_1 \quad Q = EI_1 \sin \varphi_1$$

La charge étant purement selfique, P est nul, d'où $\cos \varphi_1 = 0$ et $\varphi_1 = \pm 90^\circ$. Le gradateur consommant dans tous les cas de la puissance réactive, seule la solution positive est à retenir, soit $\varphi_1 = 90^\circ$

c) Expressions de I_1 et de Q

Les fondamentaux étant sinusoïdaux, on a $I_1 = \frac{U_1}{L\omega_0}$, d'où
$$I_1 = \frac{E}{L\omega_0} \left[2 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) + \frac{\sin(2\alpha)}{\pi} \right]$$

$Q = EI_1 \sin \varphi_1$ avec $\varphi_1 = \pi/2 \Rightarrow$
$$Q = \frac{E^2}{L\omega_0} \left[2 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) + \frac{\sin(2\alpha)}{\pi} \right]$$

d) Tracé de $Q = f(\alpha)$

Numériquement, $E^2/L\omega_0 = 220^2/16 = 3025 \text{ VAR}$. On a donc $Q = 3025 \left[2 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) + \frac{\sin(2\alpha)}{\pi} \right]$ avec α en radians ou

$Q = 3025 \left[2 \left(1 - \frac{\alpha}{180} \right) + \frac{\sin(2\alpha)}{\pi} \right]$ si α est en degrés. La courbe est superposée à celle de P (voir page précédente).

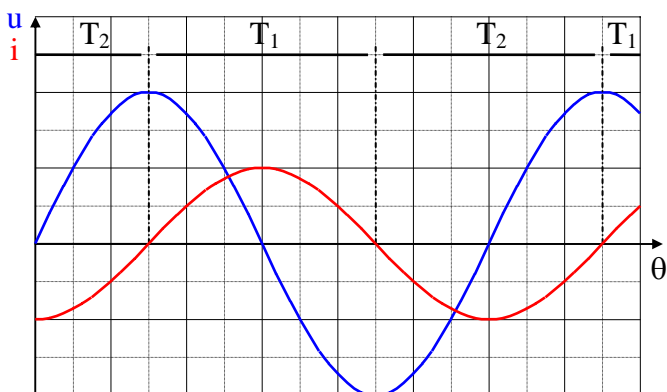
On peut noter qu'en commande longue, pour $\alpha < 90^\circ$, Q est constant et égal à 3025 VAR.

3)a) Valeurs de U_1 et de I_1

La tension u étant sinusoïdale, elle se confond avec son fondamental. On a donc $U_1 = E$, soit $U_1 = 220 \text{ V}$

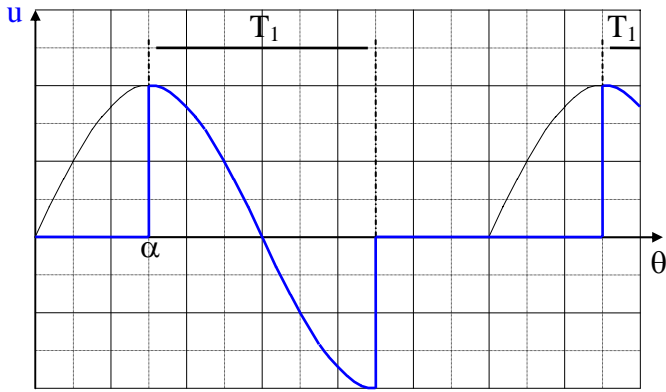
I_1 reste égal à $U_1/L\omega_0$. On a donc $I_1 = \frac{E}{L\omega_0}$ A.N.: $I_1 = 220/16$, soit $I_1 = 13,8 \text{ A}$

Allures de u et de i – Intervalles de conduction



Le courant i est déphasé de 90° par rapport à u (sa valeur crête serait de $13,8\sqrt{2}$, soit 19,4A). Vu le mode de commande, quelle que soit la valeur de α , T_1 conduit lorsque i est positif et T_2 lorsque i est négatif (Cf. ci-contre pour le tracé).

b) Allure de u



Pour α très légèrement inférieur à 90° , $\alpha_1 \cong 2(180 - 90)$, soit $\alpha_1 = 180^\circ$. Le tracé de u (Cf. ci-contre) s'obtient comme précédemment.

Conclusion

Par rapport à la courbe précédente, u est amputée de la moitié. Ses paramètres caractéristiques (valeur efficace, fondamental et harmoniques) ont donc chuté de façon importante au passage par α_0 . En particulier, U_1 , qui était égal à 220V pour α légèrement supérieur à $\pi/2$, ne vaut plus que 110V ici. Signalons également qu'un raisonnement simple sur les aires montrerait que la valeur efficace correspondante de u est égale à $E/\sqrt{2}$.

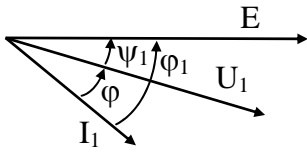
1) Expressions de U_1 et de ψ_1

$U_1 \sqrt{2} \sin(\theta - \psi_1) = U_1 \sqrt{2} (\sin\theta \cos\psi_1 - \cos\theta \sin\psi_1)$. Par identification avec l'expression de départ de u_1 , soit $a_1 \sin\theta - b_1 \cos\theta$, il vient $\begin{cases} U_1 \sqrt{2} \cos\psi_1 = a_1 \\ U_1 \sqrt{2} \sin\psi_1 = b_1 \end{cases}$, dont on déduit sans difficulté $\boxed{U_1 = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{2}} \quad \psi_1 = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}$

2) Expressions de I_1 et de φ_1

Les fondamentaux étant sinusoïdaux, on a $\underline{I}_1 = \frac{U_1}{R + jL\omega_0}$, dont on déduit en particulier $\boxed{I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + (L\omega_0)^2}}}$

$\varphi_1 = [\vec{I}_1; \vec{E}] = [\vec{I}_1; \vec{U}_1] + [\vec{U}_1; \vec{E}]$. $[\vec{I}_1; \vec{U}_1] = \varphi$, angle de phase du récepteur, égal à l'argument de $R + jL\omega_0$, donc à $\arctan(L\omega_0/R)$. Vu l'expression de u_1 , cette tension est en retard de ψ_1 sur la tension e , d'où $[\vec{U}_1; \vec{E}] = \psi_1$. Les différents vecteurs se positionnent donc comme indiqué sur le diagramme ci-contre et on a $\boxed{\varphi_1 = \psi_1 + \varphi}$



Application

Dans tout ce qui suit, les calculs sont effectués avec les angles exprimés en degrés. Ceci ne change rien pour b_1 , par contre, il faut modifier l'expression de a_1 : $a_1 = E\sqrt{2} \left\{ \frac{\alpha_1}{180} + \frac{\sin(2\alpha) - \sin[2(\alpha + \alpha_1)]}{2\pi} \right\}$. Par ailleurs, $\alpha = 90^\circ$,

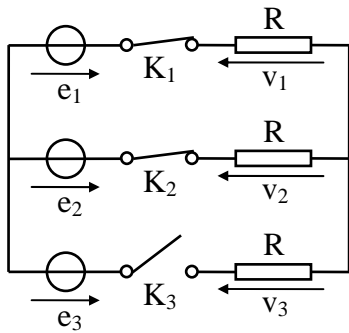
$\alpha_1 = 180 - \alpha = 90^\circ$ sur circuit résistif, U_1 , ψ_1 , I_1 , φ et φ_1 se calculent à l'aide des relations établies ci-dessus, $P = EI_1 \cos\varphi_1$ avec $E = 220V$, $I = \sqrt{P/R}$, $Q = P \tan\varphi_1$ (plus rapide que $EI_1 \sin\varphi_1$), $S = EI$ et $D = \sqrt{S^2 - P^2} = Q$.

Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

	a_1 (V)	b_1 (V)	U_1 (V)	ψ_1 (°)	I_1 (A)	φ (°)	φ_1 (°)	P (W)	I (A)	Q (VAR)	S (VA)	D (VA)
$R = 100\Omega$ $L = 0$	156	99,0	131	32,4	1,31	0	32,4	243	1,56	154	343	187
$R = 100\Omega$ $L\omega_0 = 83,9\Omega$	172	63,2	130	20,2	0,996	40,0	60,2	109	1,04	190	229	66,8

1) Expressions de v_1

K_1 et K_2 fermés:



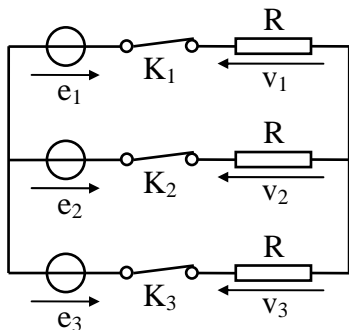
Cf. schéma ci-contre, $v_1 - v_2 = e_1 - e_2$. Comme les résistances de la charge sont égales, elles forment un diviseur potentiométrique de rapport 1/2. Il s'ensuit que

$$v_1 = \frac{e_1 - e_2}{2}.$$

K_1 et K_3 fermés:

Le même raisonnement que ci-dessus conduit à $v_1 = \frac{e_1 - e_3}{2}$.

K_1, K_2 et K_3 fermés:



On est alors en présence d'un réseau triphasé équilibré alimentant une charge triphasée elle-même équilibrée. Les points communs des tensions et de la charge sont donc au même potentiel ce qui entraîne en particulier que $v_1 = e_1$.

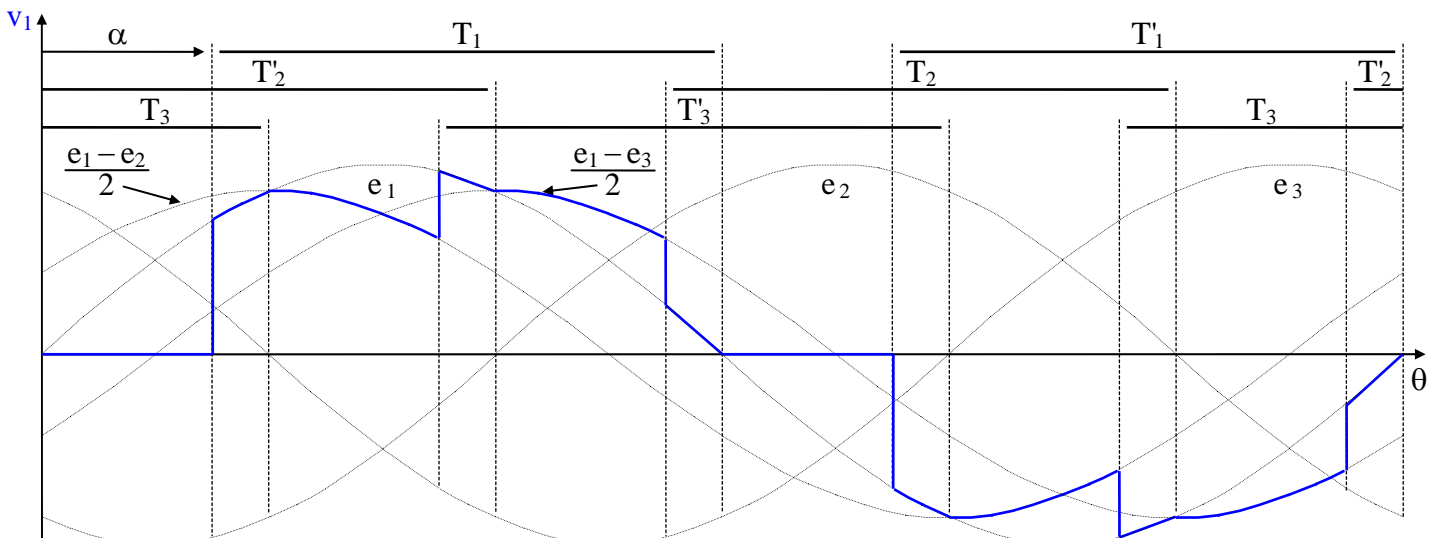
K_1 ouvert: Aucun courant ne circule dans la phase correspondante, d'où $v_1 = 0$.

2) Allure de v_1

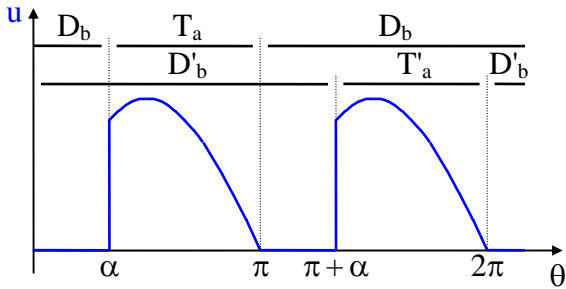
Il suffit de reprendre ce qui a été dit ci-dessus en remarquant que K_i fermé correspond à la conduction, soit de T_i , soit de T'_i , et K_i ouvert au blocage simultané des deux redresseurs. A titre d'exemple, on peut considérer les trois premières phases: T_1 et T'_1 bloqués $\Rightarrow K_1$ ouvert, donc $v_1 = 0$

T_1, T_2 et T_3 passants $\Rightarrow K_1, K_2$ et K_3 fermés, donc $v_1 = e_1$

T_1 et T'_2 passants $\Rightarrow K_1$ et K_2 fermés, donc $v_1 = (e_1 - e_2)/2$.



I)1) Allure de u



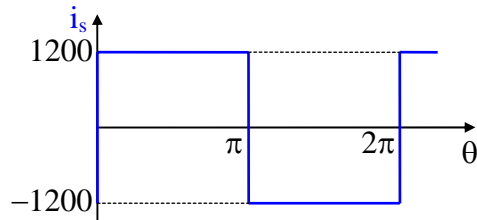
Le pont mixte étant de type dissymétrique, chaque thyristor n'est passant qu'entre son instant d'amorçage et le prochain passage par zéro de la tension d'alimentation, les diodes conduisant le reste du temps. Compte tenu de ceci, les intervalles de conduction et l'allure de u sont ceux représentés ci-contre.

2) Expression de U'_C – Valeur de U_C

$$U'_C = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} e d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} E\sqrt{2} \sin \theta d\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{U'_C = \frac{E\sqrt{2}}{\pi} (1 + \cos \alpha)}$$

$$U_C = U'_C(\alpha = 0) \Rightarrow U_C = \frac{E\sqrt{2}}{\pi} (1 + \cos 0) = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 1800}{\pi} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_C = 1620V}$$

3)a) Allure de i_s – Valeurs de I_s et du facteur de puissance



Pour $\alpha = 0$, le montage est équivalent à un redresseur non commandé, dont l'allure du courant d'alimentation est bien connue (Cf. ci-contre).

$$I_s^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1200^2 d\theta = 1200^2 \Rightarrow \boxed{I_s = 1200A}$$

En notant f le facteur de puissance, on a $f = \frac{P}{S} = \frac{U_C I_C}{E I_s} = \frac{1620 \cdot 1200}{1800 \cdot 1200}$, soit $\boxed{f = 0,900}$

b) Nouvelles valeurs de I_s et du facteur de puissance (notées I'_s et f' pour les différencier des précédentes)

sans filtre, $I_s^2 = I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots$

avec filtre, $I'_s{}^2 = I_1^2 + 0 + I_5^2 + I_7^2 + \dots$ (car le fondamental et les autres harmoniques sont supposés inchangés)

Par ailleurs, $I_3 = \frac{4I_C}{3\pi} / \sqrt{2} = \frac{4 \cdot 1200}{3\pi\sqrt{2}} = 360A$.

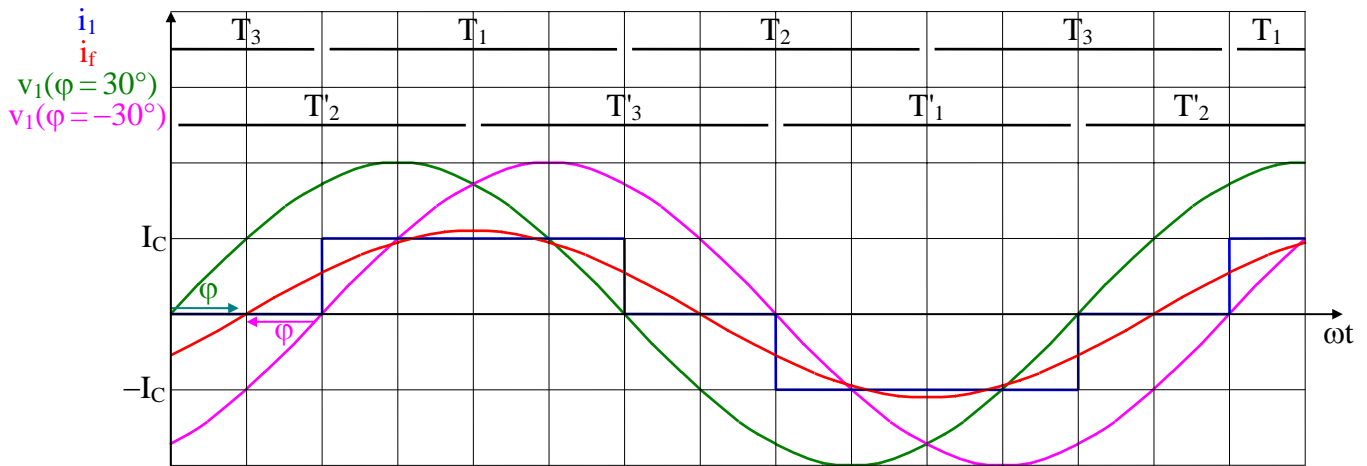
En soustrayant la première relation de la deuxième, il vient $I'_s{}^2 - I_s^2 = -I_3^2$, d'où $I'_s = \sqrt{I_s^2 - I_3^2} = \sqrt{1200^2 - 360^2}$, soit $\boxed{I'_s = 1140A}$

$f' = \frac{U_C I_C}{E I'_s} = \frac{1620 \cdot 1200}{1800 \cdot 1140}$, soit $\boxed{f' = 0,947}$

N.B.: Lorsque α est différent de zéro, le montage consomme de la puissance réactive. Pour que l'amélioration du facteur de puissance reste notable, il faut agir également au niveau de cette dernière. Sans entrer dans le détail, signalons simplement que, pour le système réel, ceci se fait en employant deux ponts mixtes en série avec une commande adéquate et en utilisant la puissance réactive fournie par le condensateur pour contrebalancer celle absorbée par les redresseurs.

II)1) Allure de i_1 et de i_f

Vu l'origine choisie, les intervalles de conduction des thyristors se positionnent comme indiqué sur le graphe de la page suivante. On en déduit l'allure de i_1 en remarquant que $i_1 = I_C$ lorsque T_1 conduit, $i_1 = -I_C$ lorsque T'_1 conduit et $i_1 = 0$ sinon. Le fondamental, lui, a une valeur crête de $(\sqrt{6}I_C/\pi)\sqrt{2} \cong 1,1I_C$ et est "centré" sur i_1 .



2) Allures de v pour les deux valeurs de φ

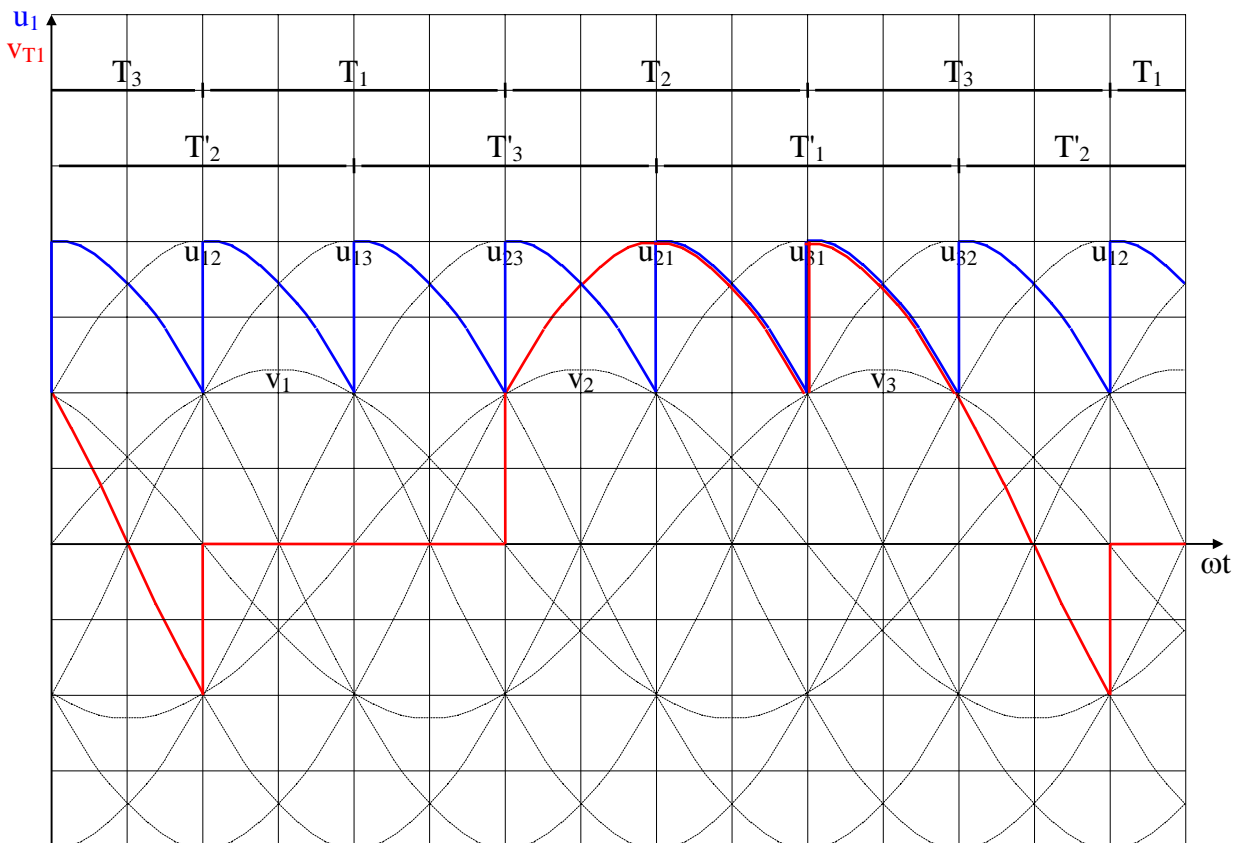
Pour $\varphi = 30^\circ$, v_1 est en avance sur i_f de la même quantité et pour $\varphi = -30^\circ$, v_1 est en retard. (Cf. ci-dessus).

3) Allures de u_1 et de v_{T1}

En ce qui concerne les intervalles de conduction, il suffit de les repositionner compte tenu du fait qu'on prend maintenant l'origine au passage par zéro de v_1 . En fait, Cf. étude ci-dessus, pour $\varphi = 30^\circ$, les intervalles se positionnent comme précédemment, et pour $\varphi = -30^\circ$, ils se décalent de 60° vers la droite.

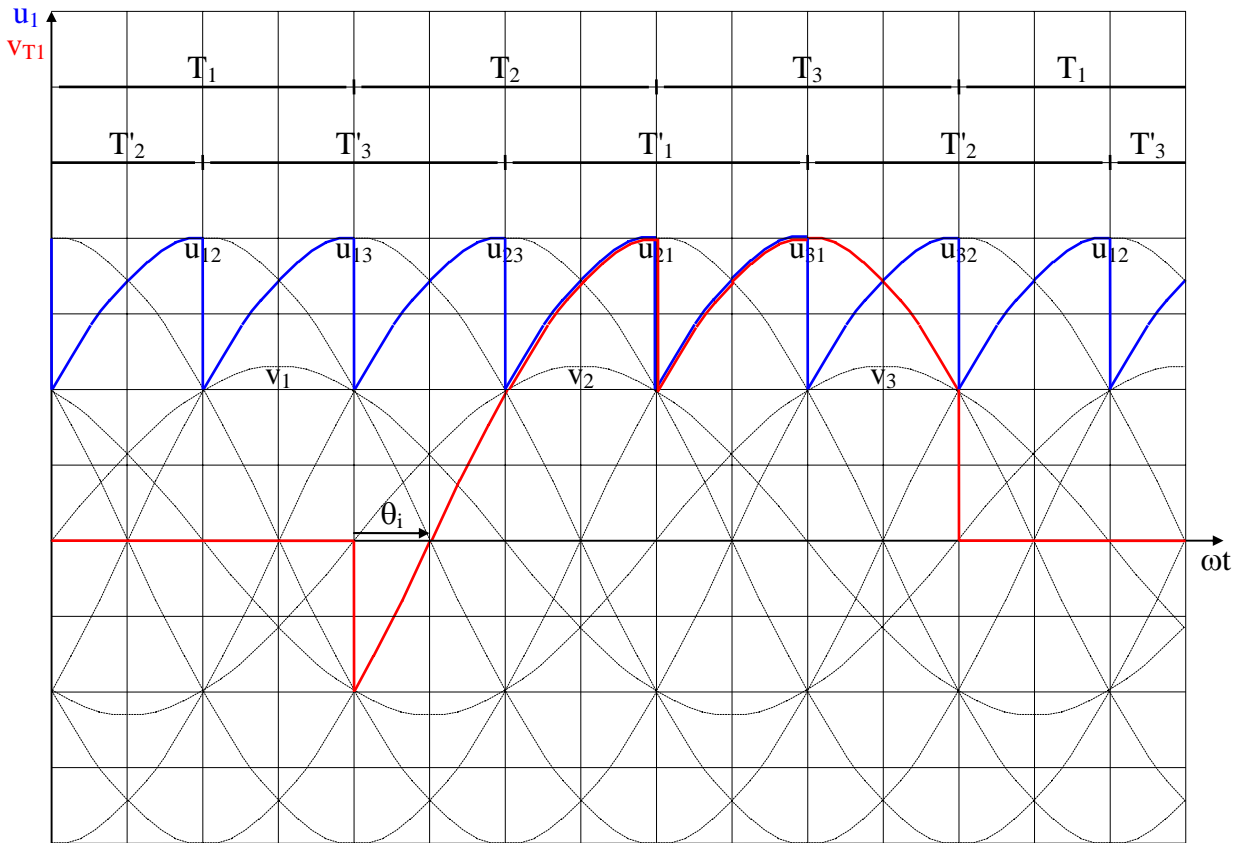
Les tensions s'en déduisent par $u_1 = u_{ij}$ avec i et j indices des thyristors T et T' qui conduisent et $v_{T1} = u_{i1}$ avec i indice du thyristor T qui conduit.

$\varphi = 30^\circ$



Le courant dans T_1 étant non nul au moment de la commutation et la tension aux bornes redevenant positive immédiatement après le blocage, son régime de commutation est de type forcé. Il en est évidemment de même de tous les autres thyristors.

$$\varphi = -30^\circ$$



Ici, T_1 est polarisé négativement pendant un certain temps après son blocage. Il peut donc fonctionner en commutation naturelle (il faut cependant que la durée d'application de la tension inverse soit suffisante, ceci sera discuté dans la question 5). De même, cela reste valable pour les autres thyristors.

4) Relation entre les grandeurs

La puissance fournie par la source de courant vaut $U'_{1C}I_C$, celle dissipée dans la charge $3VI\cos\varphi$. Comme I est égal à $\sqrt{6}I_C/\pi$, il vient $U'_{1C}I_C = 3V(\sqrt{6}I_C/\pi)\cos\varphi$, d'où

$$U'_{1C} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V \cos\varphi$$

5)a) Signe de φ – Relation entre θ_i et $|\varphi|$

Cf. étude faite au 3), le fonctionnement commutation naturelle implique que φ soit négatif.

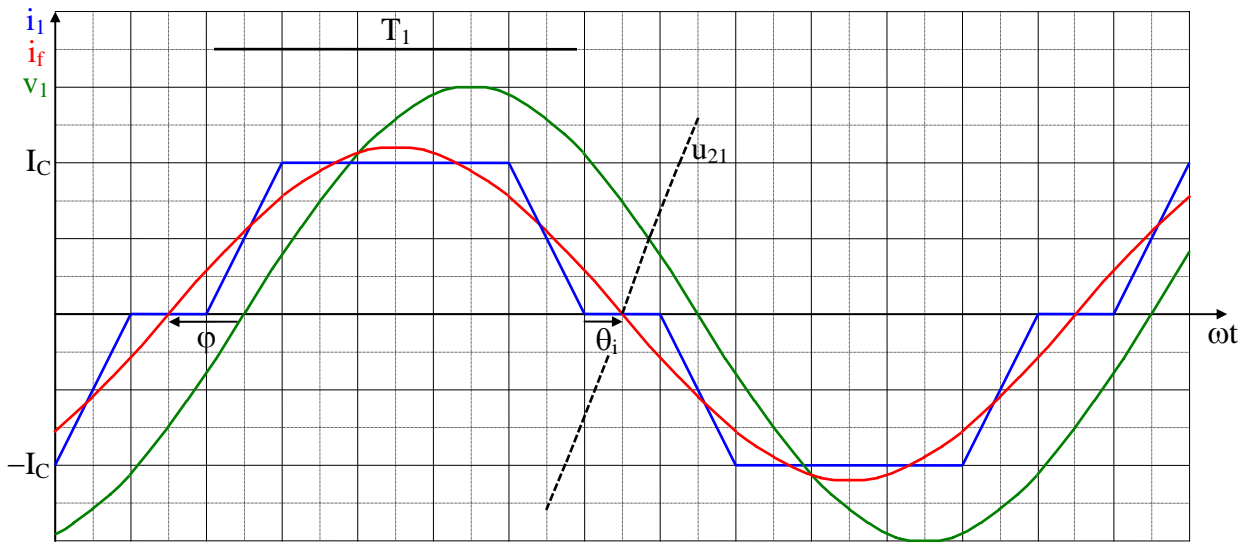
Sur la courbe ci-dessus, l'angle θ_i est égal à 30° . On vérifie donc dans ce cas particulier que $\theta_i = |\varphi|$.

Valeur minimale de $|\varphi|$

$\theta_i > \omega t_q \Rightarrow |\varphi| > \omega t_q = 1250 \cdot 150 \cdot 10^{-6} = 0,188 \text{ rad}$. La valeur minimale de $|\varphi|$ est donc $|\varphi|_{\min} = 10,8^\circ$

b) Allures de i_1, i_f et v_1

On peut commencer par placer sur le graphe l'intervalle de conduction de T_1 . Avec l'origine choisie, son amorçage se fait à $\pi/3$, soit 60° , et son blocage à $\pi + \alpha_C$, soit 210° . Vu les symétries que présente i_1 , i_f reste centré sur ce courant. La tension v_1 , elle, demeure déphasée en arrière de 30° par rapport à i_f . Par ailleurs, pour illustrer la question suivante, on a matérialisé le passage par zéro de u_{21} (rappel: c'est cette dernière qui assure le blocage de T_1).



Relation entre θ_i et $|\varphi|$

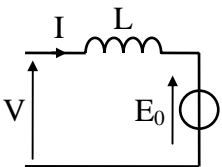
Cf. ci-dessus, l'angle θ_i est la durée angulaire entre l'annulation de i_1 et le passage par zéro de u_{21} . Ici, $\theta_i = 15^\circ$ et $|\varphi| - \alpha_C/2$ vaut $30 - 30/2 = 15^\circ$. On vérifie bien, dans ce cas particulier, que $\theta_i = |\varphi| - \alpha_C/2$.

Valeur minimale de $|\varphi|$

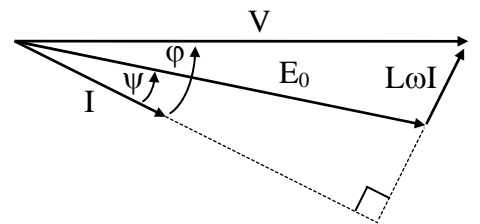
$\theta_i > \omega t_q$ entraîne $|\varphi| - \alpha_C/2 > \omega t_q$ soit $|\varphi| > \omega t_q + \alpha_C/2$. Or $\omega t_q = 10,8^\circ$ (Cf. calcul précédent). On a donc $|\varphi| > 10,8 + 30/2$, d'où

$$|\varphi|_{\min} = 25,8^\circ$$

III)1)a) Schéma équivalent – Relation – Diagramme de Fresnel



Vu les hypothèses faites, le schéma est celui tracé ci-contre. On en déduit la relation entre les grandeurs électriques $\underline{V} = jL\omega\underline{I} + \underline{E}_0$ ainsi que le diagramme:



b) Relations entre les grandeurs

Avec \underline{I} comme origine, $\underline{V} = jL\omega\underline{I} + \underline{E}_0 \Rightarrow [V; \varphi] = jL\omega I + [E_0; \psi]$ soit $V \cos \varphi + jV \sin \varphi = jL\omega I + E_0 \cos \psi + jE_0 \sin \psi$. Il suffit ensuite d'égaliser les parties réelles et imaginaires et de remplacer E_0 par $\Phi_0 \omega$ pour obtenir

$$\begin{aligned} V \cos \varphi &= \Phi_0 \omega \cos \psi \\ V \sin \varphi &= (\Phi_0 \sin \psi + LI)\omega \end{aligned}$$

Pour obtenir $\tan \varphi$, il suffit de diviser les deux relations entre elles: $\frac{V \sin \varphi}{V \cos \varphi} = \tan \varphi = \frac{(\Phi_0 \sin \psi + LI)\omega}{\Phi_0 \omega \cos \psi}$, d'où,

finalement,

$$\tan \varphi = \frac{\Phi_0 \sin \psi + LI}{\Phi_0 \cos \psi}$$

c) Expression de C et de V – Conclusions

$$C = \frac{3E_0 I \cos \psi}{\Omega} = \frac{3\Phi_0 \omega I \cos \psi}{\omega/p}, \text{ d'où}$$

$$C = 3p\Phi_0 I \cos \psi$$

N.B.: L'utilisation de la relation $\omega = p\Omega$ suppose implicitement que Ω est pris en valeur absolue (ou est toujours positif – Cf. remarque préliminaire de l'exercice 41).

$$V = |\underline{V}| = \sqrt{(\Phi_0 \cos \psi)^2 + (\Phi_0 \sin \psi + LI)^2}, \text{ soit, finalement, } \boxed{V = \sqrt{\Phi_0^2 + 2\Phi_0 LI \sin \psi + (LI)^2} \omega}$$

J constant $\Rightarrow \Phi_0$ constant. Comme ψ est constant, $C = 3p\Phi_0 I \cos \psi$ est proportionnel à I.

Si C est constant, I l'est également. A l'exception de ω , tous les termes intervenant dans V sont donc constants, ce qui entraîne que V est proportionnel à ω . De même, $\tan \varphi$ ne contient que des termes constants, φ l'est donc également.

Application numérique

$$J = 500 \text{ A} \Rightarrow \Phi_0 = 0,825 \text{ Wb}, \text{ d'où } C = 3p\Phi_0 I \cos \psi = 3 \cdot 3 \cdot 0,825 \cdot 936 \cdot \cos(-30), \text{ soit } \boxed{C = 6020 \text{ Nm}}$$

$$K = \frac{V}{\omega} = \sqrt{\Phi_0^2 + 2\Phi_0 LI \sin \psi + (LI)^2} = \sqrt{0,825^2 + 2 \cdot 0,825 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 936 \cdot \sin(-30) + (0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 936)^2}, \text{ soit}$$

$$\boxed{K = 0,715 \text{ Wb}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\Phi_0 \sin \psi + LI}{\Phi_0 \cos \psi} = \frac{0,825 \sin(-30) + 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 936}{0,825 \cdot \cos(-30)} = -0,0533 \Rightarrow \boxed{\varphi = -3,05^\circ}$$

d) Expression de C en fonction de p, V, I φ et ω

Les pertes étant négligées, $3VI \cos \varphi = 3E_0 I \cos \psi$. On a donc également $C = \frac{3VI \cos \varphi}{\Omega}$, soit $\boxed{C = \frac{3pVI \cos \varphi}{\omega}}$

Relation entre les grandeurs

Pour obtenir celle-ci, il faut repartir des relations obtenues au 1)b) et les écrire de façon à pouvoir éliminer le terme ψ , donc sous la forme $\Phi_0 \cos \psi = \frac{V}{\omega} \cos \varphi$ et $\Phi_0 \sin \psi = \frac{V}{\omega} \sin \varphi - LI$. Par addition des carrés de chaque

relation, il vient, tous calculs faits, $\boxed{\Phi_0^2 = \left(\frac{V}{\omega}\right)^2 - 2\frac{V}{\omega} LI \sin \varphi + (LI)^2}$

En y faisant apparaître le coefficient $K = V/\omega$, la relation précédente devient $\Phi_0^2 = K^2 - 2KLI \sin \varphi + (LI)^2$. Si Φ_0 et φ sont constants, K est solution d'une équation du deuxième degré dont les coefficients ne dépendent que de I. K ne dépend donc également que de ce terme. D'autre part, C peut s'écrire $3pKI \cos \varphi$, ce qui montre que, de même, C n'est fonction que de I.

Application numérique

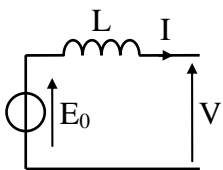
$$\Phi_0^2 = K^2 - 2KLI \sin \varphi + (LI)^2 \Rightarrow K^2 - 2KLI \sin \varphi + (LI)^2 - \Phi_0^2 = 0 \text{ soit, numériquement,}$$

$$K^2 - 2K0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 936 \sin(-30) + (0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 936)^2 - 0,825^2 = 0$$

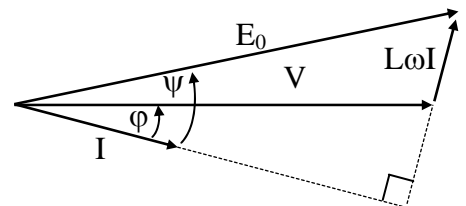
On ne retient évidemment que la racine positive, soit $\boxed{K = 0,571 \text{ Wb}}$

$$C = 3pKI \cos \varphi = 3 \cdot 3 \cdot 0,571 \cdot 936 \cdot \cos(-30) \Rightarrow \boxed{C = 4170 \text{ Nm}}$$

2)a) Schéma équivalent – Relation – Diagramme de Fresnel



Pour éviter d'avoir des angles supérieurs, en valeur absolue, à 90° , on utilise une convention générateur. Ceci conduit au schéma équivalent ci-contre, à la relation $\boxed{\underline{E}_0 = jL\omega \underline{I} + \underline{V}}$ ainsi qu'au diagramme:



b) Relations entre les grandeurs

Si φ est nul, $jL\omega \underline{I}$ est perpendiculaire à \underline{V} . On a donc $E_0 = \sqrt{(L\omega I)^2 + V^2}$, soit $\boxed{\Phi_0 \omega = \sqrt{(L\omega I)^2 + V^2}}$

IV)1) Relation liant E, α, V et φ

Cf. figure 1, en notant u_{L1} la d.d.p. aux bornes de L_1 prise en convention récepteur avec I_C , on a $u = u_{L1} + u_1$, soit $U'_C = U_{L1C} + U'_{1C}$ en passant aux valeurs moyennes. U_{L1C} étant nul, on a $U'_C = U'_{1C}$. Compte tenu des expressions de ces tensions, il vient $\frac{E\sqrt{2}}{\pi}(1 + \cos\alpha) = \frac{3\sqrt{6}}{\pi}V \cos\varphi$, soit $\boxed{\frac{E}{3\sqrt{3}}(1 + \cos\alpha) = V \cos\varphi}$

$E = 1800V \Rightarrow \frac{E}{3\sqrt{3}} = \frac{1800}{3\sqrt{3}} = 346V$. On a donc bien $\boxed{346(1 + \cos\alpha) = V \cos\varphi}$

Valeur maximale de V

A φ imposé, elle est obtenue pour $\alpha = 0$. D'où $V_{\max} = \frac{346(1 + \cos 0)}{\cos(-30)}$, soit $\boxed{V_{\max} = 799V}$

2)a) Valeur de I

Cf. figure 5, entre 0 et 70km/h, $I_C = 1200A$. On a donc $I = (\sqrt{6}/\pi)I_C = (\sqrt{6}/\pi)1200$, soit $\boxed{I = 936A}$

b) Valeurs de C et de K

$I_C = 1200A \Rightarrow J = 500A$ (toujours Cf. figure 5). Ceci, ajouté au fait que $\psi = -30^\circ$ et $I = 936A$, entraîne qu'on est dans les conditions du III)1)c). On a donc $\boxed{C = 6020Nm \quad K = 0,715Wb}$

Valeurs de V et de α

$$\begin{cases} V = K\omega \\ \omega = p\Omega \\ v = 0,719\Omega \end{cases} \Rightarrow V = Kp \frac{v}{0,719} = 0,715 \cdot 3 \frac{70}{0,719} \quad \text{soit} \quad \boxed{V = 209V}$$

$346(1 + \cos\alpha) = V \cos\varphi$ Cf. II)1)c, $\varphi = -3,05^\circ$, d'où $\cos\alpha = \frac{209 \cos(-3,05)}{346} - 1 = -0,397 \Rightarrow \boxed{\alpha = 113^\circ}$

3)a) Valeurs de I et de C – Evolution de C avec la vitesse

Dans tous les cas:

- $I = (\sqrt{6}/\pi)I_C$, où I_C se déduit de v Cf. figure 5
- $C = 3pKI \cos\varphi$ avec $K = 0,571$ Cf. question III)1)d et $\varphi = -30^\circ$, d'où $C = 3 \cdot 3 \cdot 0,571 I \cos(-30) = 4,45I$.

v(km/h)	$I_C(A)$	I(A)	C(Nm)
80	1200	936	4170
300	700	546	2430

Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-contre:

L'angle φ étant constant et K l'étant supposé également, C est uniquement proportionnel à I et évolue comme ce courant. On en déduit, Cf. figure 5, que:

- entre 80km/h et 150km/h, C est constant et égal à 4170Nm
- entre 150km/h et 300km/h, C décroît linéairement de 4170Nm à 2430Nm.

b) Valeurs de V et de α

Cf. 2)b), $V = Kp \frac{v}{0,719} = 0,571 \cdot 3 \frac{v}{0,719} = 2,38v$ et $\alpha = \arccos\left(\frac{V \cos(-30)}{346} - 1\right) = \arccos(2,5 \cdot 10^{-3}V - 1)$.

v(km/h)	V(V)	α(°)
80	190	122
300	714	38,2

De même, les résultats sont regroupés dans le tableau ci-contre:

Remarque: Valeurs exactes de K pour les différentes vitesses

Sans entrer dans le détail des calculs, signalons simplement qu'elles se déduisent de l'équation du second degré (Cf. question III)1)d), I s'obtenant à partir de I_C par $(\sqrt{6}/\pi)I_C$ et Φ_0 de J par la caractéristique à vide, I_C et J se déduisant eux-mêmes de la courbe représentée sur la figure 5.

v(km/h)	150	200	250	300
K(Wb)	0,571	0,594	0,602	0,589

On constate que la variation est faible (écart maximal de l'ordre de 5%). L'approximation K constant est donc justifiée.

4) Tracé des courbes C et V en fonction de v

Vu les hypothèses faites, elles sont constituées de segments de droite. Il suffit donc de mettre en place les points correspondants aux limites des différents cas envisagés (dont les coordonnées sont rappelées ci-dessous) et de les relier linéairement.

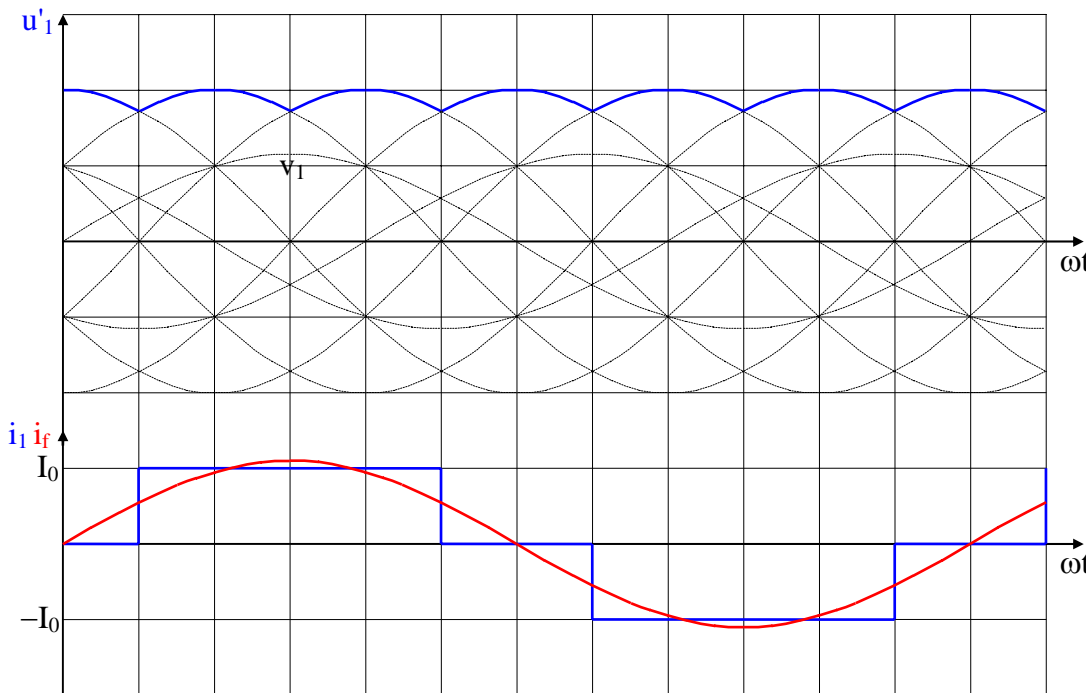
v(km/h)	0	70	80	150	300
C(Nm)	6020	6020	4170	4170	2430
V(V)	0	209	190		714

Voir page 9 pour les tracés. Comme prescrit dans l'énoncé, on y a rajouté ceux correspondant aux questions suivantes.

5) Caractéristique $C = f(n)$ à puissance mécanique maximale

Dans ce cas, on a $C = \frac{P_{max}}{\Omega} = \frac{1,1 \cdot 10^6}{v/0,719}$, soit $C = \frac{791 \cdot 10^3}{v}$ Voir page 9 pour le tracé.

V)1) Allures de u_1 , i_1 et i_f



Vu le mode de commande des thyristors, on est en présence d'un pont PD3 à diodes pour lequel les résultats sont bien connus (Cf. ci-contre).

Expression de U_0

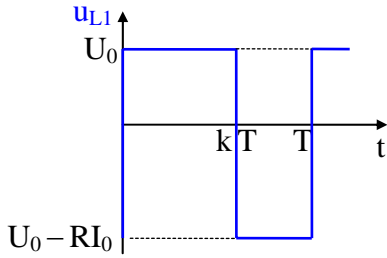
De même, on se contente ici de donner le résultat:

$$U_0 = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V$$

Valeur de φ

Cf. ci-dessus, i_f passe par zéro en même temps que v_1 . On a donc $\varphi = 0$

2) Allure de u_{L1} – Relation entre les grandeurs



Le tracé (Cf. ci-contre) s'obtient en remarquant que, si H est passant, on a $u_{L1} = U_0$ et que si H est bloqué on a $u_{L1} = U_0 - RI_0$. Comme U_{L1C} est nul, on a $\frac{1}{T} \left[\int_0^{kT} U_0 dt + \int_{kT}^T (U_0 - RI_0) dt \right] = 0$, soit $\frac{1}{T} [U_0 kT + (U_0 - RI_0)(T - kT)] = 0$,

relation qu'on peut, par exemple, écrire sous la forme $\boxed{U_0 = R(1 - k) I_0}$

3) Valeurs de U_0 et de V

Pour $k = 0$, l'expression précédente devient $U_0 = RI_0$. Si I_0 est constant, U_0 l'est effectivement aussi.

$R = 1,5\Omega \quad I_0 = 700A \Rightarrow U_0 = 1,5 \cdot 700$ soit $\boxed{U_0 = 1050V}$

$U_0 = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V \Rightarrow V = \frac{\pi}{3\sqrt{6}} U_0 = \frac{\pi}{3\sqrt{6}} 1050$ soit $\boxed{V = 449V}$

Expressions numériques de Φ_0

III)2)b) $\Rightarrow (\Phi_0 \omega)^2 = (L\omega I)^2 + V^2$ soit $\Phi_0 = \sqrt{\left(\frac{V}{\omega}\right)^2 + (LI)^2}$. Comme $V = 449V$ et $I = (\sqrt{6}/\pi)I_0 = (\sqrt{6}/\pi)700$,

soit $I = 546A$, on a $\Phi_0 = \sqrt{\left(\frac{449}{\omega}\right)^2 + (0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 546)^2}$, soit $\boxed{\Phi_0 = \sqrt{\frac{202 \cdot 10^3}{\omega^2} + 0,0477}}$

D'autre part, $\omega = p\Omega = 3v/0,719 = 4,17v$ entraîne $\Phi_0 = \sqrt{\frac{202 \cdot 10^3}{(4,17v)^2} + 0,0477}$, soit $\boxed{\Phi_0 = \sqrt{\frac{11,6 \cdot 10^3}{v^2} + 0,0477}}$

Expression numérique de C_f

$C_f \Omega = U_0 I_0 \Rightarrow C_f = \frac{U_0 I_0}{\Omega} = \frac{1050 \cdot 700}{v/0,719}$ soit $\boxed{C_f = \frac{528 \cdot 10^3}{v}}$

Application numérique

C_f et Φ_0 se calculent à l'aide des relations ci-dessus. J se déduit de Φ_0 d'après la caractéristique $\Phi_0 = f(J)$ qu'on laisse au lecteur le soin de tracer. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

v(km/h)	300	250	200	150
$C_f(Nm)$	1760	2110	2640	3520
$\Phi_0(Wb)$	0,420	0,483	0,581	0,751
J(A)	110	130	180	330

4)a) U_0 est proportionnel à V . Or, Cf. toujours III)2)b), $\Phi_0 \omega = \sqrt{(L\omega I)^2 + V^2}$ entraîne $V = \sqrt{\Phi_0^2 - (LI)^2} \omega$. J et I_0 constants impliquent Φ_0 et I constants, ce qui a pour conséquence que V , donc U_0 , est proportionnel à ω . Comme le rapport entre ω et v est constant, U_0 est bien proportionnel à v .

Valeur de C_f

$C_f = \frac{U_0 I_0}{\Omega} = \frac{U_0 \cdot 700}{v/0,719}$. Comme U_0 est proportionnel à v , C_f est bien constant. Par continuité, sa valeur est celle

calculée précédemment pour $v = 150km/h$, soit $\boxed{C_f = 3520Nm}$

Valeur du rapport U_0/v

De même, par continuité, $v = 150\text{km/h}$, $U_0 = 1050\text{V} \Rightarrow U_0/v = 1050/150$, soit $U_0/v = 7\text{V}/(\text{km/h})$

Expression numérique de k – Valeur de v_{\min}

$$U_0 = RI_0(1 - k) \Rightarrow 7v = 1,5 \cdot 700 \cdot (1 - k), \text{ soit } k = 1 - \frac{7v}{1,5 \cdot 700}, \text{ d'où, finalement, } k = 1 - 6,67 \cdot 10^{-3} v$$

$$v_{\min} \text{ correspond à } k_{\max} = 0,9, \text{ d'où } v_{\min} = \frac{1 - 0,9}{6,67 \cdot 10^{-3}}, \text{ soit } v_{\min} = 15\text{km/h}$$

b) Caractéristique de freinage

Cf. ci-dessous, elle correspond aux trois cas envisagés pour lesquels on rappelle succinctement les résultats: entre 0 et 15km/h, C_f varie linéairement de 0 à 3520Nm, entre 15km/h et 150km/h, C_f est constant et égal à 3520Nm et au-delà, C_f décroît suivant la loi $528 \cdot 10^3/v$.

