Cours Introduction à la finance - EDC 2008

Claire Peltier

To cite this version:

Claire Peltier. Cours Introduction à la finance - EDC 2008. Engineering school. Introduction à la finance, Ecole des Créateurs et dirigeants d'entreprises La défense, 2008, pp.44. <cel-00650395>

HAL Id: cel-00650395

https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00650395

Submitted on 10 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cours EDC Introduction à la finance – Claire PELTIER – 2008.

Plan du cours :

Présentation des marchés financiers en 2008.
Définitions des produits standards d'Euronext.
Détermination des prix à terme (contrats futurs et forward)
Couverture d'un portefeuille d'actions avec des contrats indiciels.
L'univers risque neutre.
Les options – Présentation générale
Black Sholes généralisé.
Les Greeks – Définitions et calculs.
Pourquoi calculer les greeks.

- **PRESENTATION DES MARCHES FINANCIERS**

HISTORIQUE

1141

Création d'un lieu de change sur le Grand Pont

Sous l'impulsion de Louis VII, un lieu de change est installé sur le Grand Pont de Paris. Appelées alors « changeurs », les personnes chargées de ces activités prendront bien plus tard le nom d' « agents de change ». Le pont, quant à lui, sera renommé le **Pont au Change**.

Au XIIIe siècle les banquiers lombards sont les premiers à échanger des créances d'Etat à Pise, Gênes ou Florence

XIV Le terme de bourse apparaît au début du XIVe siècle, à Bruges en Flandre. Cette ville était un important centre de commerce depuis la fin du XIIe siècle. Une place de Bruges, qui portait le nom de la famille *Van der Buerse*, était le lieu d'échange pour de nombreux marchands. Rapidement, on s'est mis à dire qu'on allait à la *Buerse* chaque fois qu'on réglait le volet financier d'une affaire. En 1309, le phénomène s'institutionnalise par la création de la Bourse de Bruges. Elle est rapidement suivie par d'autres, en Flandre et dans les pays environnants (Gand et Amsterdam). C'est encore en Belgique que le premier bâtiment conçu spécialement pour abriter une bourse fut édifié à Anvers

1636 ***octobre***

Premier krach en Hollande

Le premier **krach** boursier se déroule en Hollande et concerne le commerce des bulbes de Tulipe. Cette marchandise très prisée possédait une valeur excessivement élevée. Lorsque la noblesse pris conscience du déséquilibre financier du produit, les prix chutèrent fortement. Ce **krach**, surnommé la « **Tulipomania** » aura de sérieuses répercussions sur l'économie de l'époque.

2 avril

Adoption du dollar

1792 Le Congrès des Etats-Unis adopte le "Mint Act" qui instaure une nouvelle unité monétaire, le **dollar**. Cette disposition renforce l'autonomie du pays, indépendant depuis le 4 juillet 1776. Les premières pièces seront frappées en 1793 à Philadelphie. Il faudra attendre 1861 pour voir apparaître les premiers billets verts.

1792 ***17 mai***

Wall Street nait sous un platane

La Bourse de New-York voit le jour quand 24 courtiers, réunis sous un platane devant les numéros 68-70 de la rue du Mur, décident d'appliquer un taux de commission uniforme à toutes les ventes de titres. C'est la création du New York Stock Exchange, qu'on appelle aussi "**Wall Street**", la première place financière du monde.

1800 ***18 janvier***

Création de la Banque de France

Dans le but de relancer l'économie et d'augmenter la quantité de **monnaie** en circulation, le premier consul **Napoléon Bonaparte**, édite un décret stipulant la **création** de la **Banque de France**. L'établissement installe son siège à l'hôtel de Toulouse à **Paris** et reçoit 30 millions de francs pour amorcer son activité. La **banque de France** compte parmi ses principaux clients des banques commerciales qui prêtent de l'argent aux particuliers et qui elles-mêmes empruntent à la **Banque de France**. Le privilège d'émission des billets limité à la capitale s'étendra à toute la France à partir de 1848.

1801 ***3 mars***

Naissance de la bourse londonienne

Quelques courtiers londoniens, appelés « brokers », choisissent un nouvel emplacement pour leur activité. Situé dans le Capel Court, leur bâtiment n’est ouvert qu’à 500 membres souscripteurs. Leurs premières spéculations donnent ainsi naissance à la bourse moderne de Londres.

1826 ***4 novembre***

Le palais Brongniart est inauguré

Le **palais Brongniart** est achevé et prêt à abriter la Bourse de Paris. **Napoléon** confia la réalisation de l’édifice à Alexandre Théodore Brongniart dès 1808. Ce dernier élabora les plans du monument mais mourut en 1813, avant son aboutissement. Achevée par Labarre, son œuvre architecturale abritera les activités boursières françaises pendant plus d’un siècle. Les échanges à la criée disparaîtront au cours du XXe siècle. La 13 juillet 1987, l’immense corbeille sera démontée, laissant la place à l’informatisation.

1884

26 mai

Création du Dow Jones

Charles Dow, qui a créé une agence de presse avec Edward Jones, publie le premier indice des valeurs industrielles construit à partir d'une liste de douze titres (un seul, **General Electric**, en fait toujours partie). La liste sera portée à vingt en 1916 et à trente en 1928. Le célèbre indice boursier est né. Il synthétise en un seul chiffre la performance des 30 valeurs industrielles le composant.

1971

8 février

Première cotation informatisée du Nasdaq

La National Association of Securities Dealers Automated Quotations met en place son premier réseau informatique entre agents de change. Fondée par la NASD (National Security Dealers Association), le Nasdaq est le premier marché de cotations informatisées. À l’origine, son but était d’améliorer la transparence des marchés hors-cote. Il deviendra par la suite le second plus grand marché boursier américain après celui de Wall Street, en misant principalement sur les secteurs des nouvelles technologies.

1984

3 janvier

Premier calcul du "Footsie"

Le "Financial Stock Exchange Index", connu sous le nom de "Footsie" ou FTSE 100 est calculé pour la première fois. Il comprend les 100 premiers titres de la Bourse de Londres et sera calculé et publié quotidiennement dans le journal "Financial Times

1987

19 octobre

Lundi "noir" à Wall Street

A Wall Street l'indice Dow Jones perd 22,6% de sa valeur entraînant la majeure partie des places financières internationales dans sa chute. Les cours n'amorceront leur remontée qu'a partir du 21 octobre. Un perte de 10 à 20% est enregistrée pour tous les pays.

1988

22 janvier

Dissolution de la Compagnie des Agents de Change

Une loi est promulguée et réforme le système boursier en France. La Compagnie des Agents de Change est supprimée pour laisser la place à la Société des Bourses Françaises.

2000 **22 septembre**

Création d’Euronext

Les Bourses d’Amsterdam, de Bruxelles et de Paris fusionnent pour former l’Euronext. Deux ans plus tard, cette nouvelle bourse européenne rachètera le marché de produits dérivés britannique LIFFE (London International Financial Futures and options Exchange) et accueillera la Bourse de Lisbonne. L’entreprise Euronext Paris sera par la suite mise en place et chargée de la gestion des marchés de la Bourse parisienne. Elle occupera en partie les locaux du palais Brongniart.

2002 **1 janvier**

L'euro devient la monnaie officielle pour 12 pays

L’euro entre en circulation comme monnaie de paiement dans 12 pays européens (France, Allemagne, Espagne, Portugal, Irlande, Italie, Autriche, Pays-Bas, Belgique, Luxembourg, Finlande, Grèce). Un euro est égal à environ 6,56 francs français. Au total, plus de 6 milliards de pièces seront mises en circulation le 1er janvier

2005 **30 août**

Prix record pour le baril de pétrole

Après les craintes sur la production intérieure dues au passage de Katrina au Etats-Unis, le baril de pétrole atteint le prix record de 70,85 dollars. On assiste ainsi à une envolée des prix au sein d’une hausse continue depuis l’année 2003. Celle-ci s'explique en partie par l'augmentation de la demande en Chine. Ainsi le prix du pétrole augmentera de 40 % entre janvier 2005 et janvier 2006.

1-2 PRESENTATION DU MARCHER EN 2008.

Rôle de la bourse

ce sont les sociétés de bourse qui sont le passage obligé de l'investissement en bourse car elles détiennent le monopole des transactions boursières. Jusqu'en 1988 c'étaient des officiers ministériels (les agents de change) qui détenaient ce monopole, cependant le crack de 1987 est venu modifier cette organisation et les agents de change se sont transformés en sociétés de bourse.
Au delà de ces intermédiaires financiers, il existe plusieurs organismes qui sont chargés d'organiser le fonctionnement des marchés et surveiller ses différents acteurs.

Euronext
Cette société a pour mission de veiller au bon déroulement de la cotation des valeurs, elle peut intervenir pour interrompre la cotation, notamment dans le cas d'irrégularités ou d'événements propres à engendrer une spéculation injustifiée (OPA, OPE,...). Une autre de ses missions et d'assurer le calcul et la cotation des indices (ex: CAC 40) ainsi que d'assurer la promotion de la place parisienne en France et à l'étranger.

Euronext est issu de la fusion de plusieurs bourses européennes (Amsterdam, Paris, Bruxelles et Lisbonne et Londres).

Clearnet,
Cette société réalise toutes les opérations de compensation. Dans un contrat (à terme) classique, l'acheteur n'est jamais garanti que le vendeur exécutera l'obligation à la date d'échéance. Ce dernier peut pour diverses raisons ne pas remplir les termes du contrat. Le développement des marchés dérivés a permis une plus grande transparence. Ainsi aucun des deux protagonistes (acheteur ou vendeur) ne se connaisse. Entre eux deux, la présence d'une chambre de compensation.

Sans chambre de compensation

Acheteur > Vendeur

Avec chambre de compensation

Acheteur > Chambre de compensation > Vendeur

Cette dernière a pour rôle d'obliger les deux parties à respecter leurs engagements respectifs qu'ils n'ont plus directement entre eux, mais avec la chambre de compensation. Pour éviter les dérives qui ont pu exister par le passé, le MATIF a mis en place très rapidement un système d'appel de marge. Chaque soir, les positions de chaque intervenant sont étudiées. Si elles dégagent des plus-values, le détenteur de la position se verra verser directement en espèces sur son compte le montant de cette plus-value. Dans le cas contraire, la moins-value sera déduite. Si le solde espèces ne permet plus de garantir la solvabilité du client, si le deposit est inférieur à un certain montant, la position est automatiquement débouclée si l'investisseur n'apporte pas les fonds nécessaires. C'est ce que l'on appelle l'appel de marge. On dit aussi que les plus ou moins-values sont Marked to market. C'est à dire ajusté en fonction du marché. Cet ajustement est ici quotidien.

Il existe donc deux catégories de transactions boursières, les marchés de gré à gré (sans chambre de compensation – OTC Over The Counter) et les marchés organisés (avec chambre de compensation)

L'Autorité des marchés financiers (AMF)
Créée en 2003, l'AMF est issue de la fusion de plusieurs organismes : la Commission des opérations de bourse (COB), le Conseil des marchés financiers (CMF) et le Conseil de discipline de la gestion financière(CDGF).

L'Autorité des marchés financiers est un organisme public indépendant qui a pour missions de veiller :

- à la protection de l'épargne investie dans les instruments financiers et tout autre placement donnant lieu à appel public à l'épargne ;
- à l'information des investisseurs ;
- au bon fonctionnement des marchés d'instruments financiers.

<u>Ses principales compétences portent sur :</u>

- Les opérations et l'information financières : l'AMF réglemente et contrôle l'ensemble des opérations financières portant sur des sociétés cotées : introductions en bourse, augmentations de capital, offres publiques, fusions... et veille au bon déroulement des offres publiques boursières. Elle vérifie que les sociétés publient, en temps et en heure, une information complète et de qualité, délivrée de manière équitable à l'ensemble des acteurs.

- Les produits d'épargne collective: elle autorise la création de SICAV et de FCP. Elle vérifie notamment l'information figurant dans le prospectus simplifié de chaque produit qui doit être remis au client avant d'investir.

- Les marchés et leurs infrastructures : l'Autorité des marchés financiers définit les principes d'organisation et de fonctionnement des entreprises de marchés (comme Euronext Paris) et surveille les marchés et les transactions qui s'y déroulent.

- Les professionnels (établissements de crédit autorisés à fournir des services d'investissement, entreprises d'investissement, sociétés de gestion, conseillers en investissement financier, démarcheurs, etc.). L'AMF détermine les règles de bonne conduite et les obligations que doivent respecter les professionnels autorisés à fournir des services d'investissement ou des conseils en investissement.

1-3 Les principaux indices boursiers :

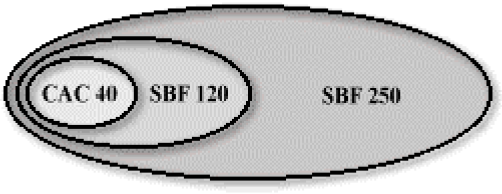
Les indices boursiers sont devenus des instruments essentiels dans la gestion de portefeuille. En effet, ils sont représentatifs :
- soit d'un marché : l'indice CAC 40 reflète la tendance des plus grandes capitalisations françaises,
- soit d'un secteur d'activité particulier : l'indice sectoriel de l'automobile intègre uniquement les constructeurs automobiles et les équipementiers.

Au fil des ans, Euronext a développé une grande gamme d'indices permettant de suivre l'évolution des marchés.
Les investisseurs ont ainsi à leur disposition des références adaptées à la gestion de leurs actions. Euronext assure le calcul et la diffusion de tous ces indices.

1. Les indices de la place de Paris Euronext diffuse des indices de marché et de nombreux indices sectoriels.

Les trois principaux indices de marché de la Bourse de Paris sont :
- le CAC 40,
- le SBF 120,
- le SBF 250.

Ces indices sont dit emboîtés. Les valeurs qui composent le CAC 40 font également partie des valeurs du SBF 120, elles-mêmes incluses dans l'indice le plus large, le SBF 250.



1.1 Le CAC 40

Le CAC 40 est l'indice de référence de la place parisienne. Lancé le 31 décembre 1987 avec une base à 1000 points, cet indice est composé de 40 valeurs qui font partie des plus grosses capitalisations du pays. Sa composition est mise à jour régulièrement par un comité d'experts : l'indice doit être représentatif du marché financier parisien aussi bien en terme de volumes de transactions qu'en représentativité des secteurs d'activité.
Le CAC 40 est également utilisé comme support pour les options et les contrats à terme sur le MONEP : les investisseurs parient sur la hausse ou la baisse du CAC 40 en utilisant des produits dérivés comme les futures, warrants ou options.
Le cours du CAC40 résulte du calcul d'une moyenne, pondérée par la capitalisation de chacune des valeurs le composant. Ainsi, plus la valeur a une capitalisation importante, plus sa variation influe sur celle de l'indice. Une valeur ne peut cependant pas excéder 15% de pondération au sein du CAC 40.

1.2 Le SBF 120

Le SBF 120 est composé de 120 valeurs importantes, toutes cotées en continu. Il donne une vision plus fidèle de l'état du marché français puisqu'il représente un échantillon plus large de sociétés. Il est régulièrement utilisé comme référence pour l'indexation des fonds investis en actions. L'ensemble des valeurs du CAC 40 entrent dans la composition du SBF 120.

1.3 Le CAC Mid 100

Cet indice dédié aux valeurs moyennes est composé des 100 premières capitalisations boursières suivant les 60 premières valeurs de la cote et qui affichent un taux de rotation annuel de leurs titres supérieur à 5%. Il est calculé en continu toutes les trente secondes.

1.4 Le SBF 250

Sur le même principe que le SBF 120, le SBF 250 est encore plus large dans sa sélection de valeurs : il en contient 250. Il a pour objet de représenter l'évolution du marché français dans son ensemble et de fournir une mesure de référence à long terme pour la gestion des portefeuilles d'actions. Des grandes valeurs comme LVMH ou L'Oréal côtoient des plus petites comme Bricorama ou Fromageries Bel.

Nom	Nombre de valeurs	Mode de cotation
CAC 40	40	En continu de 9h à 17h30
SBF 80	80	
SBF 120	120	
CAC Next 20	20	
CAC IT 20	20	
CAC Mid 100	100	Calculés 2 fois par jour, sur les cours d'ouverture et sur les cours de clôture.
SBF 250	250	
CAC Small 90	90	
CAC Mid&Small 90	190	

1.5 Le CAC SMALL 90

Il regroupe les 90 valeurs qui suivent immédiatement celles incluses dans l'indice CAC Mid100. Le CAC Small90 est calculé deux fois par jour, à l'ouverture et à la clôture du marché.

1.6 Le CAC Mid & Small 190

Contenant 190 valeurs, cet indice est la fusion des deux indices précédents.

1.7 Les indices sectoriels

Il existe 34 indices sectoriels propres à un secteur ou un sous secteur d'activité particulier: automobile, énergie, pharmacie. Ces indices sont des subdivisions économiques de l'indice SBF 250 basées sur la nomenclature de la ParisBourse SBF SA. Ils permettent aux investisseurs d'anticiper l'évolution du cours des actions en fonction de l'activité économique du secteur.

1.8 Un Indice technologique, le CAC IT 20

Lancé en début d'année 2005, cet indice intègre 20 valeurs « technologiques » des secteurs des logiciels et services informatiques, équipements destinés aux technologies de l'information, télécommunications, média et photographie, et des équipements électriques et électroniques. Il est calculé en continu toutes les trente secondes.

1.9 Révision des indices par Euronext

La composition des indices n'est pas figée et bouge réguliérement, un comité scientifique est chargé de cela.

A l'exception du CAC 40 et du CAC Next20 dont la révision est trimestrielle, les autres indices seront revus une fois par an, sauf opérations sur titres.

Enfin, il faut noter qu'aucune valeur ne peut excéder le seuil de 15% de la capitalisation flottante totale des indices CAC 40, CAC Next20 et CAC IT20.

2. Les principaux indices mondiaux

Le Dow Jones

Certainement le plus connu de tous les indices boursiers mondiaux, c'est aussi le plus ancien puisqu'il est né en 1896. Il est coté quotidiennement depuis ce jour. Le Dow Jones est l'indice de référence du premier marché financier mondial : la Bourse de New-York.
Il ne se compose que de 30 valeurs, les 30 plus grosses capitalisations américaines. Son calcul est très simple et complètement différent de celui du CAC 40. Il n'y a pas de pondération et chaque valeur le composant a la même représentativité à l'intérieur du Dow Jones.
On parle couramment de Dow Jones ; cependant son vrai nom est le Dow Jones Industrial Average (DJIA). Il reflète essentiellement le secteur des valeurs industrielles.

Aucun investisseur ne peut ignorer l'évolution du Dow Jones. Son importance est telle dans l'économie qu'il donne souvent le ton aux autres places financières. On voit souvent des séances à Paris attentistes de l'ouverture de la Bourse new-yorkaise.

Le Nasdaq

Cet indice très volatil est représentatif des valeurs technologiques américaines (Biotechnologies, informatique, Internet, etc.). Celui qui est largement diffusé en Europe est le Nasdaq composite, calculé à partir de plusieurs milliers de valeurs. Le Nasdaq 100, lui est restreint à 100 actions.

Dax

Le DAX est l'indice de référence de la principale place financière allemande, Francfort. Il est composé des 30 premières capitalisations du pays, et son calcul est soumis à une pondération.

Le Nikkei

L'indice majeur de Tokyo est très large dans sa composition puisqu'il contient 225 valeurs. Son calcul est identique à celui de l'indice américain. Aucune pondération des valeurs n'est réalisée.
Son étude est également intéressante car il est représentatif de toute la zone économique de l'Asie. Ces systèmes économiques étant très différents des nôtres, la corrélation est faible. Ils doivent être analysés à part et plutôt à l'échelle régionale en observant les variations boursières et les mutations économiques de toute la zone Asie (Corée, Singapour, etc.)

Le FTSE 100

Surnommé " Footsie " l'indice de référence du marché londonien a été créé en 1984. Il est composé des 100 premières capitalisations anglaises. Son mode de calcul est similaire à celui du CAC 40 : chaque valeur est pondérée par sa capitalisation. Tout comme à Paris, l'essentiel des échanges d'actions est réalisé sur les valeurs de cet indice. A Londres, 80 % des transactions opérées portent sur les valeurs du Footsie. Londres est la première place financière européenne.

1-4 Produits standards cotés sur Euronext en Janvier 2008.

Famille Actions :

Actions
Contrats à terme sur actions
Options sur actions
Fonds
Warrants et certificats
ETF Trackers
Options sur ETC Trackers

Indices

Indices Globaux (ex : Euronext 100, Next Cac 70)
Indices Nationaux
Indices Sectoriels
Autres indices (métal, énergie, agriculture)
Options sur Indices

Taux d'intérêts

Obligations
Dérivés sur obligations
Dérivés taux court terme
Swapnote

Matières Premières

Contrat à terme sur matières premiers (ex cacao, sucre blanc)
Options sur contrat à terme de matières premières

Devises

Future sur USD/EURO
Options sur USD/EURO
Future USD/EURO
Options sur USD/EURO

VOCABULAIRE

Actions

Titre cessible et négociable représentant une fraction de capital d'une société de capitaux. Sa valeur S_t varient en fonction du temps et des résultats de l'entreprise. Chaque action peut émettre un dividende souvent annuel qui est noté I, payé au détenteur de l'action à la date T, date de délivrance de ce dividende. A la date T la valeur de l'action chute de la valeur du dividende : $S_{T+dt} = (S_T - I) \times e^{rdt}$

Dans les modèles mathématiques, on considère un taux exponentiel annuel noté q équivalent. $S_{T+dt} = S_T \times e^{(r-q)dt}$

c'est à dire $qdt \approx \dfrac{I}{S_T}$

Contrats à terme

Un contrat à terme est un engagement ferme d'acheter un actif (appelé sous-jacent , noté S_t) à une date future donnée pour un prix convenu au départ (K). Il se distingue d'un contrat au comptant (spot) dans lequel la transaction est réalisée immédiatement.

Il existe deux catégories de contrat à terme :

- les contrats à terme forward échangé de gré à gré
- les contrat à terme futur échangé sur le marché organisé qui en assure la liquidité (possibilité de revente en cours de vie et appel de marge cf chapitre contrat à terme)

L'acheteur du contrat reçoit le sous jacent S qu'il peut revendre au prix du marché à l' échéance, S_T , et le paye à la valeur d'achat K. Le flux unique final est donc $S_T - K$.
Si $S_T > K$ il gagne $S_T - K$.
Si $S_T < K$ il perd $S_T - K$.

Le vendeur du contrat livre le sous jacent S qu'il peut acheter au prix du marché à l' échéance, S_T , et reçoit la valeur d'achat K. Le flux unique final est donc $K - S_T$.
Si $S_T > K$ il perd $K - S_T$.
Si $S_T < K$ il gagne $K - S_T$.

Options

Acheter une option d'achat ou Call = droit (et non obligation) d'acheter un actif (appelé sous jacent) à un prix fixé au départ (appelé « valeur d'exercice » ou « strike », noté K) à la date d'échéance du contrat appelé maturité (notée T).

Acheter une option de vente ou Put = droit (et non obligation) de vendre un actif (appelé sous jacent) à un prix fixé au départ (appelé « valeur d'exercice » ou « strike », noté K) à la date d'échéance du contrat appelé maturité (notée T).

Une option donne le droit (mais non l'obligation) de réaliser la transaction prévue. Donc on ne réalise l'opération seulement lorsqu'on gagne. (C'est la différence fondamentale avec les contrats à terme pour lesquels les contrepartie sont obligée de réaliser la transaction. Cette particularité implique qu'acheter un contrat d'option à un coût initial appelé premium.

Acheter un call :

Flux en date de conclusion du contrat : payer le premium
Flux à l'échéance T : si $S_T > K$ on exerce sont droit et on gagne $S_T - K$
Si $S_T < K$ on a perdu donc on n'exerce pas l'option. on reçoit 0
Le flux final est donc $\max(S_T - K, 0)$

Acheter un put :

Flux en date de conclusion du contrat : payer le premium
Flux à l'échéance T : si $S_T < K$ on exerce sont droit et on gagne $K - S_T$
Si $S_T > K$ on a perdu donc on n'exerce pas l'option. on reçoit 0
Le flux final est donc $\max(K - S_T, 0)$

Warrants

Un warrant = option d'achat ou de vente « américaine » c'est à dire que l'exercice de l'option peut être réalisé à une date quelconque entre la date de négociation et l'échéance. Le gain réalisable par le détenteur de l'option est meilleur que pour l'option standard dite « européenne ». En effet, on exerce cette option à la date où on estime gagner le plus.
Le premium est donc plus élevé que pour les options standards.

Fonds

En janvier 2001, NYSE Euronext créait le marché de fonds cotés en bourse dédié aux trackers et ETF actifs

Trackers

Un tracker est un fond indiciels négociable en bourse. Il offre la performance d'un indice.

- Comme pour toute valeur mobilière, il possède un numéro de code valeur et les ordres se passent comme pour une action. Le traker verse ou capitalise les dividendes.
- S'il est parfois ardu d'obtenir la composition d'un fond traditionnel, il en va différemment pour les trackers qui sont parfaitement transparents. Leur composition

est diffusée quotidiennement. La valeur liquidative indicative est diffusée tout au long de la séance.

Classification

NYSE Euronext propose de classer les trackers en quatre catégories :

- Les trackers sur indices de marché
- Les trackers sur indices de matières premières (produits agricoles, métaux ferreux, métaux précieux, énergie)
- Les trackers sur indices de stratégie : trackers sur des indices intégrant différents type de stratégie d'investissement. On retrouve des fonds à effet de levier, à capital protégé, des fonds affichant une performance inverse de l'indice, des fonds intégrant des stratégies d'options standards.

ETF actifs

ETF = Exchange Traded Fund

Contrairement Trackers, ils ne reproduisent pas uniquement l'évolution de leur indice de référence. Ils présentent un niveau d'exposition au risque variable, ajusté systématiquement en fonction de l'évolution des marchés, et optimisé en fonctions d'anticipations de tendance et de volatilité.

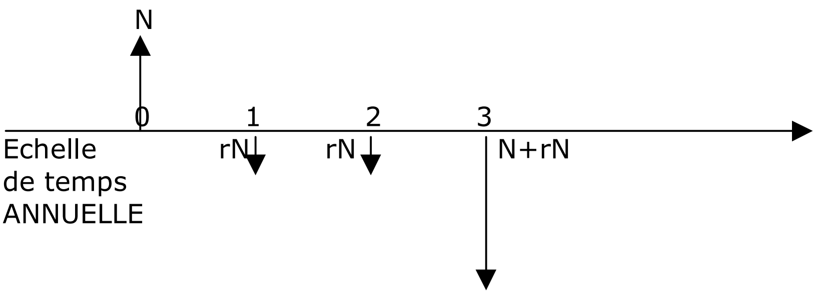
Obligation

Les emprunts obligataires sont émis un état, des collectivités publiques et des émetteurs privés. Une obligation est un titre représentatif d'une créance. Cette créance est généralement rémunérée à taux fixe, (taux nominal) et avec des coupons annuels.

Soit N (nominal) le montant de l'obligation = montant reçu par l'émetteur a l'émission
Soit r le taux de l'emprunt en base annuel.
Le coupon annuel versé chaque année vaut $r \times N$
A l'échéance de l'obligation,T, l'émetteur rembourse N

Exemple A

Emetteur(vendeur de l'obligation sur 3 ans annuel)



Souscripteur(acheteur de l'obligation)

En cours de vie de l'obligation, (avant l'échéance), l'acheteur de l'obligation peut la revendre au cours du marché, c'est à dire la valeur actualisée de tous les flux à venir. On appelle le cours du marché la valeur actualisée nette, (VAN).

Exemple A : si le souscripteur souhaite revendre l'obligation 3 ans annuel à la date t comprise entre l'année 1 et 2, il va la revendre au prix suivant :

$$VAN = rN \times B(t,2) + (1+r)N \times B(t,3)$$

où B(t,1) est le facteur d'actualisation observé en t pour l'échéance 1 et B(t,2) est le facteur d'actualisation observé en t pour l'échéance 2.

Option sur obligation

Le sous jacent de cette option (call ou put) est une obligation. Le prix d'exercice notée K correspond à la valeur fixée au départ de l'option. Cette valeur K doit être comparée à la VAN à la date d'exercice de l'option.
La date de l'exercice de l'option doit rester inférieure à la date de fin de l'obligation.

Swapnote

Un swapnote est une obligation fictive qui commence à une date future pour une durée déterminée à l'avance. Elles sont cotées en continu sur Euronext

Exemple :

Five Year Euro Swapnote :

Date de départ : troisième mercredi de Mars, Juin, Septembre Décembre
Date de fin : 5 ans après la date de départ
Nominal : 100
Taux Nominal : 6.00% annuel
Facteur d'actualisation : ceux de l'Euribor

Ces obligations fictives représentent les sous jacent fictifs des contrat à terme ou des options sur obligation. Cela permet d'obtenir un prix coté sur lequel tout le monde s'accorde. A l'échéance de l'option, soit on livre une obligation réelle ajustée par un facteur multiplicatif (facteur de concordance) pour la rendre la plus proche possible du prix de la swapnote, soit on paye le différentiel de prix coté.

Détermination des prix à terme

Notation

T : délais de 0 jusqu'à la date de livraison d'un contrat mesurée en année
t : délais depuis la signature du contrat 0 jusqu'à la date d'évaluation mesurée en année
r : taux sans risque annuel continu pour un placement ou un emprunt (supposée constant)
S_t : prix de l'actif sous jacent au contrat à la date t (cotation)

Prix à terme

C'est le prix d'exercice K du contrat stipulé en t pour la livraison du support en T.

Prix à terme= prix d'exercice K du contrat

Stratégie pour définir le prix à terme d'une action sans dividende

ARBITRAGE CASH AND CARRY

	0	T
Achat de l'action	$-S_0$	S_T
Emprunt pour acheter l'action	S_0	$-S_0e^{rT}$
Vente à terme et livraison du support		$K-S_T$
Flux net	0	0

Il existe une opportunité d'arbitrage si une stratégie de valeur nulle en 0 offre la possibilité d'obtenir un flux non nul à la date T. Donc, pour ne léser aucune des contreparties du contrat, il faut que le flux net final soit également nul.

D'où :

Prix à terme futur sans dividendes $= S_0e^{rT}$

En cas de dividende versé pendant la vie du contrat

Par le même résonnement, sachant que le propriétaire de l'action reçoit un dividende en t de valeur I et qu'il peut le placé sur le marché. Tandis que le vendeur du contrat ne reçoit pas ce dividende, on obtient la stratégie suivante :

	0	T
Achat de l'action	$-S_0$	$S_T + Ie^{r(T-t)}$
Emprunt pour acheter l'action	S_0	$-S_0e^{rT}$
Vente à terme et livraison du support		K $-S_T$
Flux net	0	0

Prix à terme futur avec dividendes livré I= $\left(S_0 - Ie^{-rt}\right)e^{rT}$

Pour un dividende proportionnel :

Modèle mathématique pour simplifier les calculs quand on ne connaît pas le dividende.
Pour obtenir S_T à l'échéance, il faut acheter S_0e^{-qT} action au départ.

	0	T
Achat de l'action	$-S_0e^{-qT}$	$S_Te^{qT-qT} = S_T$
Emprunt pour acheter l'action	S_0e^{-qT}	$-S_0e^{(r-q)T}$
Vente à terme et livraison du support		K $-S_T$
Flux net	0	0

Prix à terme futur avec dividendes proportionnel q= $S_0e^{(r-q)T}$

Evaluation d'un contrat forward

La valeur d'un contrat forward est toujours nulle au moment où il est crée, à la date 0. Il peut ensuite avoir une valeur positive ou négative en t.

Notation

F_t^T	Prix à terme d'un futur d'échéance T commençant à la date t
f_t^T	Prix du contrat forward d'échéance T à la date t

Prix du contrat forward d'échance T à la date t

$$f_t^T = \left(F_t^T - F_0^T\right) \times e^{-r(T-t)}$$

avec pour des dividendes continus

$$F_t^T = S_t \times e^{(r-q)(T-t)}$$

A la date 0

$$\boxed{f_0^T = \left(F_0^T - F_0^T\right) \times e^{-r(T-t)} = 0}$$

et $F_0^T = S_0 \times e^{(r-q)T}$

A une date quelconque t

$$f_t^T = \left(S_t \times e^{(r-q)(T-t)} - S_0 \times e^{(r-q)(T-0)}\right) \times e^{-r(T-t)}$$

$$\boxed{f_t^T = S_t \times e^{-q(T-t)} - S_0 \times e^{-qT+rt}}$$

A l'échéance T

$$f_T^T = S_T \times e^{-q(T-T)} - S_0 \times e^{-qT+rT}$$

$$\boxed{f_T^T = S_T - S_0 \times e^{(r-q)T}}$$

La base

On défini la base B comme étant égale à l'écart entre le prix à terme et le prix spot (au comptant)

$$B_t^T = F_t^T - S_t$$

Dans le cas d'un dividende continu (si pas de dividende q=0) :

$$B_t^T = F_t^T - S_t = S_t \times e^{(r-q)(T-t)} - S_t$$

Plus la date t de valorisation se rapproche de l'échéance T, plus la base diminue pour devenir nulle en T.

Le prix à terme converge vers le prix spot à l'échéance.

$$B_t^T = F_t^T - S_t \xrightarrow{t \to T} 0$$

Evaluation des contrats futures

Le contrat forward décrit précédemment ne donne lieu à aucun flux physique avant l'échéance T.
En T l'acheteur du contrat forward reçoit (ou verse) la marge globale du contrat à l'échéance, c'est à dire $f_T^T - f_0^T$

Le contrat futur diffère du précédent en ce que la marge globale est versée progressivement entre 0 et T et non en bloc à l'échéance, en fonction des prix du marchés. Plus précisément, dans le cas d'un futur, chaque jour t, l'acheteur est crédité (ou débité) de la « marge quotidienne » $f_{t_i}^T - f_{t_{i-1}}^T$

La somme algébrique des marges quotidiennes sont égales à la marge globale. Mais en finance il faut actualiser les flux. On montre que lorsque les taux d'intérêts sont constants et plats, il y a égalité parfaite entre les deux mécanisme. Lorsque les taux varient, on montre que la différence est négligeable.

Date de flux	forward	futur
0	0	0
t_1	0	$f_{t_1}^T - f_{t_0}^T$
	0	
t_i	0	$f_{t_i}^T - f_{t_{i-1}}^T$
	0	
	0	
$t_n = T$	$f_T^T - f_0^T$	$f_{t_n}^T - f_{t_{n-1}}^T$
SOMME	$f_T^T - f_0^T$	A

- Si on néglige l'actualisation des flux, alors A= $f_T^T - f_0^T$

- Si on actualise les flux de façon générale avec une courbe de taux

(r_i,t_i) $r_i=r_{i-1}+dr_i$ et $t_{i+1}=t_i+dt$

alors A= $\sum_{i=1}^{n}\left(f_{t_i}^{T}-f_{t_{i-1}}^{T}\right)\times e^{r_i(T-t_I)}$

A= $f_T^T+\sum_{i=1}^{n-1}\left(e^{r_i(T-t_I)}-e^{r_{i-1}(T-t_{I-1})}\right)\times f_{t_i}^T$

Pour chaque date t_i

$$\left(e^{r_i(T-t_I)}-e^{r_{i-1}(T-t_{I-1})}\right)\times f_{t_i}^T \qquad =\left(F_{t_i}^T-F_0^T\right)\left(e^{r_i(T-t_I)}-e^{r_{i-1}(T-t_{I-1})}\right)\times e^{-r_i(T-t_i)}$$

$$=\left(F_{t_i}^T-F_0^T\right)\left(1-e^{-dr_i\ (T-t_i)+r_{i-1}dt}\right)$$

$$\approx\left(F_{t_i}^T-F_0^T\right)\times\left(dr_i\times\left(T-t_{i-1}\right)-r_{i-1}dt\right)$$

Les prix à terme « anticipent » la valeur futur en T du sous jacent. Donc (sauf crack boursier) les anticipations de t_0 du prix du sous jacent en T , F_0^T ,et celle en t_i , $F_{t_i}^T$ restent proches. La différence $\left(F_{t_i}^T-F_0^T\right)$ est donc faible. Faible multiplié par un premier ordre en dt et dr équivaut à négligeable.

Cette approximation est d'autant plus juste que le contrat à terme est proche

- Démonstration Future = Forward dans le cas où les taux sont fixes

Débouclage d'une opération futur

dates	0	t_1	T_2	t_{n-1}	$t_n=T$
Contrats futur achetés en 0	0	$f_{t_1}^T-f_{t_0}^T$	$f_{t_2}^T-f_{t_1}^T$	$f_{t_{n-1}}^T-f_{t_{n-2}}^T$	$f_{t_n}^T-f_{t_{n-1}}^T$
Contrats futurs vendus en t2 le soir, à la clotûre	0	$f_{t_1}^T-f_{t_1}^T=0$	-($f_{t_2}^T-f_{t_1}^T$)	-($f_{t_{n-1}}^T-f_{t_{n-2}}^T$)	-($f_{t_n}^T-f_{t_{n-1}}^T$)
Total	0	$f_{t_1}^T-f_{t_0}^T$	0	0	0

Stratégie d'investissement d'apport 0 sur le futur pour montrer que dans le cas où les taux sont non stochastiques, Future = Forward

jour	0	1	2		n-1	T=n
Prix future	$f_{t_0}^T$	$f_{t_1}^T$	$f_{t_2}^T$		$f_{t_{n-1}}^T$	f_T^T
Achats le soir de la quantité de contrat suivante	e^{r_1}	e^{2r_2}	e^{3r_3}		e^{nr_n}	
Vente le soir du même nombre de contrat acheté la veille		e^{r_1}	e^{2r_2}		$e^{(n-1)r_{n-1}}$	e^{nr_n}
Appel de marge	0	e^{r_1} *($f_{t_1}^T$ - $f_{t_0}^T$) +0	e^{2r_2} *($f_{t_2}^T$ - $f_{t_1}^T$)+0		$e^{(n-1)r_{n-1}}$ *($f_{t_{n-1}}^T$ - $f_{t_{n-2}}^T$)+0	e^{nr_n} *(f_T^T - $f_{t_{n-1}}^T$)+0
Appel de marge actualisée en zéro		($f_{t_1}^T$ - $f_{t_0}^T$)	($f_{t_2}^T$ - $f_{t_1}^T$)		($f_{t_{n-1}}^T$ - $f_{t_{n-2}}^T$)	(f_T^T - $f_{t_{n-1}}^T$)

Dans ce cas, marge globale = somme marge actualisée

lorsque les taux sont non stochastiques : prix future = prix forward

Couverture avec des contrats

Définition :

Un opération de couverture est destinée à réduire le risque affectant à l'instant future T une position existante. Quand la couverture permet l'élimination parfaite du risque, elle est dite parfaite, mais en général, elle n'est que partiel.

Couverture par contrat à terme

Quand il s'agit d'une couverture par contrat à terme, ce denier porte sur un sous jacent aussi proche que possible de l'actif à couvrir et avec une échéance de contrat la plus proche possible de l'instant futur du risque.

Dans le cas particulier où le sous jacent du contrat est identique à l'actif existant, et que la date de maturité du contrat est la même que l'horizon de gestion T, il suffit de vendre un contrat forward sur cet actif pour s'en assurer le prix F_0^T . La couverture est alors parfaite.

Exemples :

- si une entreprise de la Zone Euro sait qu'elle recevra 100 $ en septembre, elle est exposé au risque de baise du $ face à l'Euro. L'achat de contrats dollars contre Euro permet d'annuler ce risque. Le taux de change réalisé en septembre est égale à celui déterminé en 0 par le contrat négocié.
- Si une entreprise sait qu'elle recevra des liquidités M dans 3 mois. Et que dans 3 mois elle voudra acheter une action S pour ce montant M. Si elle anticipe une hausse de son cours, elle peut acheter un contrat d'échéance 3 mois sur cette action et l'acheter dans 3 mois au prix fixé en 0.

Modèle de couverture maximum

Si il n'existe pas de contrat sur le sous jacent S à couvrir, la couverture ne peut être que partiel. Il faut choisir une stratégie d'investissement pour réduire le risque de variation du sous jacent.

Si un opérateur détient un sous-jacent dont la valeur cotée est S_t à la date t, à l'horizon de gestion H, la valeur S_T de cette action est inconnue. Pour se couvrir en cas de chute du sous jacent, il peut acheter (ou vendre selon le signe) x contrats sur une valeur proche de ce sous-jacent (même secteur ou même famille de matière première) avec une date d'échéance du contrat T>H.

Soit t, une date comprise entre t_0 et H,

$V_t = S_t + x f_t^T$

on note $\Delta V = V_H - V_t$, $\Delta S = S_H - S_t$ et $\Delta f^T = f_H^T - f_t^T$

Pour couvrir entre H et t, il faut que la fluctuation du portefeuille soit minimale (c'est à dire qu'il faut choisir x, le nombre de contrat, pour que $Variance(\Delta V)$ soit minimale

$$\begin{aligned} Variance(\Delta V) &= Variance\left(\Delta S + x\Delta f^{T}\right) \\ &= \operatorname{var}(\Delta S) + x^{2}\operatorname{var}\left(\Delta f^{T}\right) + 2x\operatorname{cov}\left(\Delta S, \Delta f^{T}\right) \end{aligned}$$

Le minimum est atteint quand la dérivée par rapport à x s’annule :

$$2x\operatorname{var}\left(\Delta f^{T}\right) + 2\operatorname{cov}\left(\Delta S, \Delta f^{T}\right) = 0$$

$$\boxed{x^{*} = -\frac{\operatorname{cov}\left(\Delta S, \Delta f^{T}\right)}{\operatorname{var}\left(\Delta f^{T}\right)}}$$

$$\begin{aligned} VarianceMIN(\Delta V) &= \operatorname{var}(\Delta S) + x^{*2}\operatorname{var}\left(\Delta f^{T}\right) + 2x^{*}\operatorname{cov}\left(\Delta S, \Delta f^{T}\right) \\ &= \operatorname{var}(\Delta S) + \left(\frac{\operatorname{cov}\left(\Delta S, \Delta f^{T}\right)}{\operatorname{var}\left(\Delta f^{T}\right)}\right)^{2}\operatorname{var}\left(\Delta f^{T}\right) - 2\frac{\operatorname{cov}\left(\Delta S, \Delta f^{T}\right)}{\operatorname{var}\left(\Delta f^{T}\right)}\operatorname{cov}\left(\Delta S, \Delta f^{T}\right) \\ &= \operatorname{var}(\Delta S) - \frac{\operatorname{cov}^{2}\left(\Delta S, \Delta f^{T}\right)}{\operatorname{var}\left(\Delta f^{T}\right)} \end{aligned}$$

Rappel : R le coefficient de corrélation : $R^{2}(a,b) = \dfrac{\operatorname{cov}^{2}(a,b)}{\operatorname{var}(a)\times\operatorname{var}(b)}$

$$\boxed{VarianceMIN(\Delta V) = \operatorname{var}(\Delta S)\times\left(1 - R^{2}\right)}$$

Plus la corrélation est proche de 1, plus le portefeuille est stable. La couverture est parfaite pour R=1.

Couverture d’un portefeuille

Si le portefeuille continent plusieurs sous jacents, et qu’on cherche à le couvrir par un contrat sur indice par exemple, il faut déterminer le nombre de contrat optimal pour l’ensemble du portefeuille.

Soit $S = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_n S_n$

Alors $\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta S_i$

et $x^* = -\frac{\operatorname{cov}\left(\Delta S, \Delta f^T\right)}{\operatorname{var}\left(\Delta f^T\right)}$

$$\operatorname{cov}\left(\Delta S, \Delta f^T\right) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta S_i , \Delta f^T\right) = \sum \alpha_i \operatorname{cov}\left(\Delta S_i , \Delta f^T\right)$$

donc

$$\boxed{x^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*}$$

Le nombre optimal de contrat à acheter pour couvrir un portefeuille contenant plusieurs sous jacents est la somme pondérée des nombre de contrats optimaux pour chaque sous jacent.

LIEN AVEC LE MEDAF

Formule du médaf :

Espérance(rendement d'un portefeuille)

=taux dans risque+ β (rentabilté de l'indice-taux sans risque)

avec $\beta = \dfrac{\operatorname{cov}\left(rendement \quad portefeuille, rendement \quad indice \right)}{\operatorname{var} iance\left(rendement \quad indice \right)}$

Lien avec la couverture optimale :

$$x^* \approx -\frac{S}{I}\beta$$

où S et I sont les valeurs en 0 du portefeuille et de l'indice

démonstration :

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}\left(\dfrac{\Delta S_{t_I}}{S_{t_i}}, \dfrac{\Delta I_{t_I}}{I_{t_i}}\right)}{\operatorname{var} iance\left(\dfrac{\Delta I_{t_I}}{I_{t_i}}\right)} \approx \frac{\operatorname{cov}\left(\dfrac{\Delta S_{t_I}}{S}, \dfrac{\Delta I_{t_I}}{I}\right)}{\operatorname{var} iance\left(\dfrac{\Delta I_{t_I}}{I}\right)} = \frac{\dfrac{1}{SI}\operatorname{cov}\left(\Delta S_{t_I}, \Delta I_{t_I}\right)}{\dfrac{1}{I^2}\operatorname{var} iance\left(\Delta I_{t_I}\right)} = \frac{I}{S}\frac{\operatorname{cov}\left(\Delta S_{t_I}, \Delta I_{t_I}\right)}{\operatorname{var} iance\left(\Delta I_{t_I}\right)}$$

pour retrouver x*, il faut montrer que $\Delta f_{t_I}^{\ T} \approx \Delta I_{t_I}$

où $f_{t_i}^{T}$ est la valeur en t_i du contrat d'échéance T sur l'indice I qui ne délivre pas de dividende.

Rappel : $f_t^T = \left(F_t^T - F_0^T\right) \times e^{-r(T-t)}$ où $F_t^T = I_t \times e^{r(T-t)}$

$$f_{t_{i+1}}^T - f_{t_i}^T \qquad = \left(F_{t_{i+1}}^T - F_0^T\right) \times e^{-r_{i+1}(T-t_{i+1})} \text{ - } \left(F_{t_i}^T - F_0^T\right) \times e^{-r_i(T-t_i)}$$

$$= I_{t_{i+1}} - I_{t_i} - I_0 e^{r_0 T}\left(e^{-r_{i+1}(T-t_{i+1})} - e^{-r_i(T-t_i)}\right)$$

Donc au premier ordre

$$\Delta f^{T}{}_{t_I} \approx \Delta I_{t_I} + I_0 e^{r_0 T} \times \left(-r_{i+1}\left(T - t_{i+1}\right) + r_i\left(T - t_i\right)\right)$$

$$\Delta f^{T}{}_{t_I} \approx \Delta I_{t_I} + I_0 e^{r_0 T} \times \left(r_i dt - dr_i\left(T - t_i\right)\right)$$

$$\Delta f^{T}{}_{t_I} \approx \Delta I_{t_I}$$

donc

$$\beta \approx \frac{I_0}{S_0} \frac{\operatorname{cov}\left(\Delta S_{t_I} \frac{}{S_{t_i}}, \Delta I_{t_I}\right)}{\operatorname{var} iance\left(\Delta I_{t_I}\right)} \approx \frac{I_0}{S_0} \frac{\operatorname{cov}\left(\Delta S_{t_I} \frac{}{S_{t_i}}, \Delta f_{t_i}^T\right)}{\operatorname{var} iance\left(\Delta f_{t_i}^T\right)} \approx -\frac{I}{S} x^*$$

Univers Risque Neutre

Dans l'univers historique, chaque action S^i suit la diffusion suivante :

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_t$$

Soit un portefeuille composé de x_i actions S_i autofinancé (s'est à dire sans apport supplémentaire pendant la vie du portefeuille et x constant)

$$P = xS_1 + (1-x)S_2$$

$$dP = xdS_1 + (1-x)dS_2$$

Si on place la valeur P au taux sans risque, il aurait la même valeur que si on le place sur les actions (absences d'opportunité d'arbitrage). Donc

$$\frac{dP}{p} = rdt$$

$$\frac{dP}{P} = xdS_1 \frac{1}{P} + (1-x)dS_2 \frac{1}{P}$$

soit $\alpha_1 = x\frac{S_1}{P}$ et $\alpha_2 = (1-x)\frac{S_2}{P}$

alors $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

et

$$\frac{dP}{P} = \alpha_1 \frac{dS_1}{S_1} + \alpha_2 \frac{dS_2}{S_2} = rdt$$

$$\frac{dP}{P} = \alpha_1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t) + \alpha_2(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t) = rdt$$

donc $$\begin{aligned} \alpha_1(\mu_1) + (\alpha_2)(\mu_2) = r \\ \alpha_1(\sigma_1) + (\alpha_2)(\sigma_2) = 0 \end{aligned}$$

Donc $$\alpha_1 = \frac{r\sigma_2}{\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{-r\sigma_1}{\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1}$$

Comme $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ **on a** $$\frac{r\sigma_2}{\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1} - \frac{r\sigma_1}{\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1} = 1$$

$$r\sigma_2 - r\sigma_1 = \mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1$$

$$r\sigma_2 - \mu_1\sigma_2 = r\sigma_1 - \mu_2\sigma_1$$

$$\boxed{\frac{r-\mu_1}{\sigma_1} = \frac{r-\mu_2}{\sigma_2} = \lambda}$$

Le rapport est indépendant de l'échéance et constant quelque soit l'action choisie.

on peut donc changer de probabilité : (Girsanov)

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_t \quad = \mu_i dt + \sigma_i \left(dW_t \quad - \frac{r-\mu_i}{\sigma_i} dt \right)$$

Sous la probabilité risque neutre on obtient $\boxed{\frac{dS_i}{S_i} = rdt + \sigma_i dW_t}$

OPTION NÉGOCIABLE

Définition

Une option d'achat - **ou call** - est un titre financier conditionnel qui donne le droit, mais non l'obligation, d'acheter un actif détermineé. appelé l'actif support (ou sous-jacent), à un prix convenu à l'avance - le pris d'exercice E - à ou avant une date d'échéance déterminée T.

De même, l'option de vente - **ou put** - est le droit, mais pas l'obligation, de vendre l'actif sous-jacent au prix d'exercice E à ou avant la date d'échéance T.

L'option est dite **européenne** si elle n'est exerçable qu'à la date T, et **américaine** si elle l'est à tout moment jusqu'à T.

Elle est négociable si elle est échangée sur un marché organisé, et de gré à gré ou OTC (over the counter) dans le cas contraire.
Sur les marchés organisés, les contrats d'options sont standardisés et fongibles. Un contrat de base, appelé série, est défini par les quatre paramètres suivants : le titre sous-jacent (en qualité et en nombre), la date d'échéance, le prix d'exercice et la nature (call ou put) de l'option.

Il y a quatre positions de base : l'achat du call, celui du put, la du call et celle du put.
Les titres (ou actifs) supports (ou sous-jacents) sont très varié :

- actions,
- contrats à terme,
- devises,
- taux d'intérêt,
- indices boursiers,
- marchandises,
- métaux
- ou même options.

Facteurs influençant la valeur des options

La valeur d'une option dépend en général de cinq paramètres
La valeur S du titre sous-jacent ; quand S augmente, la valeur C du call augmente et la valeur P du put diminue, puisque le prix d'exercice E est fixé.

- **Le prix d'exercice E** *;* plus ce dernier est élevé, plus le call est bon marché et plus le put est cher puisque, en cas d'exercice, E sera payé par le détenteur du call et encaissé par le détenteur du put.

- **La volatilité a du titre sous-jacent** *;* celle-ci est mesurée par l'écart-type de la distribution du taux de rentabilité logarithmique du support. Plus le cours du titre est volatil, plus il a de chances, au terme d'une période donnée, de s'élever au-dessus du prix d'exercice (ce qui est favorable au call) et plus il a de chances aussi de descendre au-dessous de celui-ci (cas favorable au put). Ceci implique que le call et le put sont d'autant plus chers que la volatilité du sous-jacent est forte.

La maturité de l'option ; la durée T qui sépare une option de son échéance exerce un double effet sur la valeur du premium, à travers la volatilité d'une part et le loyer de l'argent d'autre part. Plus l'échéance **est** lointaine, plus la probabilité de voir le cours du support s'écarter fortement du prix d'exercice (et donc pour l'acheteur de réaliser un profit) est élevée. Cette influence positive de la durée de vie T sur la valeur de l'options due à la volatilité est commune au call et au put. La seconde influence, celle du loyer de l'argent, est cependant différente pour le call et le put. En ce qui concerne le premier, plus l'échéance est éloignée, plus tardivement s'effectuera le décaissement du prix d'exercice si l'option est exercée et, par conséquent, plus l'option est chère : les deux effets, volatilité et loyer de l'argent, s'additionnent et un call plus long vaut toujours plus cher qu'un call identique plus court. En revanche, le facteur taux d'intérêt joue un rôle négatif dans le cas du put puisqu'il est préférable d'encaisser le prix d'exercice le plus tôt possible, toutes choses égales d'ailleurs. Les deux effets étant contradictoires, un put *européen* plus long peut valoir plus ou moins cher qu'un put identique plus court. Un put *américain* plus long, cependant, ne peut valoir moins qu'un put identique plus court, puisqu'il est exerçable immédiatement (l'effet loyer de l'argent est alors nul).

Pour résumer, la valeur d'une option autre qu'un put européen est d'autant plus élevée que sa date d'échéance est éloignée.Un corollaire immédiat est que le simple passage du temps diminue la valeur des options, sauf éventuellement dans le cas du put européen.

- **Le taux d'intérêt** ; en tant que coût d'opportunité d'un placement alternatif, le loyer de l'argent influence la valeur des options. La discussion précédente suffit à expliquer pourquoi les calls sont d'autant plus chers et les puts d'autant moins chers que les taux d'intérêt sont élevés.

- **Les coupons** constituent le sixième facteur, éventuel, influençant la valeur des primes. Sauf exception, les options négociables ne sont pas protégées contre le détachement des coupons, dividendes ou autres flux de trésorerie afférents au support. Toutes choses égales par ailleurs, un tel détachement (intervenant avant la date d'échéance de l'option) diminue la valeur du sous-jacent, donc diminue la valeur du call et augmente celle du put.

Valeur de l’option

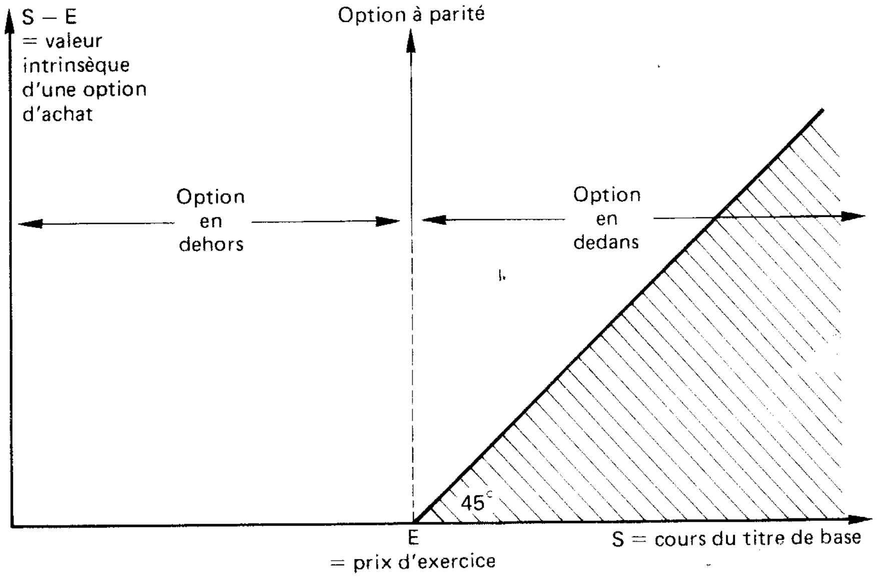
De façon classique, on décompose la valeur marchande d'une option en deux composantes :

_ sa valeur intrinsèque, d'une part,

_ sa surcote, d'autre part.

La valeur intrinsèque d'une option représente ce que serait la valeur du contrat si son échéance intervenait sur le champ. Elle est donc positive ou nulle, selon que l'option, étant donné le cours actuel du titre de base, pourrait, ou non, être exercée par son détenteur.

Ainsi, par exemple, la valeur intrinsèque d'une option d'achat ne diffère de zéro que si le cours du titre sous-jacent est supérieur au prix d'exercice de l'option. Dans ce cas précis, elle est égale au cours de l'action de base diminué du prix d'exercice *(fig.* 1.1).



A l'inverse, la valeur intrinsèque d'une option de vente n'est différente de zéro que si le cours du titre sous-jacent est inférieur au prix d'exercice de l'option. Elle est égale au prix d'exercice diminué du cours de l'action de base

- Lorsque la valeur intrinsèque d'une option d'achat ou de vente est nulle, l'option est dite " en dehors " ou " out of the money ". Dans le cas particulier où le cours du titre sous-jacent est égal au prix d'exercice de l'option, elle est dite " à parité " ou " at the money ".

— Lorsque la valeur intrinsèque d'une option d'achat ou de vente est positive, l'option est dite "en dedans" ou "in thé money".

Une option négociable pouvant être exercée à tout moment, son prix ne peut être inférieur à sa valeur intrinsèque.

La surcote d'une option représente le surplus de valeur de cette dernière par rapport à sa valeur intrinsèque, étant donné le temps qui lui reste à courir.

Considérons, tout d'abord, le cas d'une option d'achat.

— Lorsque le cours du titre de base est plus bas que le prix d'exercice, l'option ne peut pas être exercée tout de suite. Cependant, d'ici son échéance, le cours du titre sous-jacent peut s'élever et, le cas échéant, dépasser le prix d'exercice. Ainsi, tant qu'il existe un espoir de pouvoir exercer l'option et, par là-même, de réaliser un bénéfice, les investisseurs sont prêts à payer une surcote pour détenir le contrat. Bien entendu, lorsque le cours de l'action sous-jacente est très largement inférieur au prix d'exercice, la probabilité de pouvoir lever l'option est extrêmement faible et la surcote se trouve avoir une valeur proche de zéro. Par contre, dès que le cours de l'action s'élève et se rapproche du prix d'exercice, les chances de pouvoir, exercer l'option s'accroissent. De façon progressive, les opérateurs acceptent de payer alors une surcote de plus en plus importante.

— Quand le cours de l'action vient à dépasser le prix d'exercice, la surcote commence à décroître. En effet, plus le cours de l'action augmente et plus il devient probable que celui-ci, d'ici à l'échéance du contrat, ne redescendra pas en dessous du niveau du prix d'exercice, et donc que l'option sera exercée. Si le cours de l'action fléchit sans compromettre l'exercice de l'option, l'acheteur de cette dernière risque, s'il conserve le contrat jusqu'à l'échéance, de perdre davantage que s'il avait acquis directement l'action (trajet AB de la figure 1.3). De même, si une légère hausse intervient, la plus-value de l'acheteur d'option sera également plus faible que celle qu'il aurait pu réaliser s'il avait possédé l'action (trajet AC de la figure 1.3). Dans ces conditions, le montant de la surcote ou, en d'autres termes, la valeur de l'avantage représenté par l'achat de l'option par rapport à l'achat direct du titre de base diminue au fur et à mesure que le cours de ce dernier augmente.

Parité Call Put

Soient un call et un put **européens** de mêmes prix d'exercice K et date d'échéance T écrits sur le même support S au comptant. Leurs valeurs respectives C et P sont liées par la relation de parité :

$$C-P = S-Ee^{-rT}$$

où r est le taux continu annualisé du marché monétaire prévalant pour des opérations de durée T exprimée en fraction d'année.

Démonstration :

Constituons un portefeuille comprenant un put, un call vendu, le support et un emprunt d'un montant Ee^{-rT}. Deux cas sont possibles à l'échéance :
S(T) > E et S(T) ‟ E.

Dans le premier cas, le cours du titre S(T) est supérieur au prix d'exercice. Le put acheté n'a alors aucune valeur et est abandonné, le call est exercé contre la position et implique une perte E - S(T), le titre est vendu à sa valeur S(T) et l'emprunt remboursé pour $-Ee^{-rT}e^{rT}$, soit - E. La valeur totale de la position est donc nulle. Dans le second cas possible, le cours du titre est inférieur (ou égal) au prix d'exercice, le call vendu est alors abandonné par l'acheteur, le put acheté est exercé et rapporte E - S(T), le titre est vendu à sa valeur S(T) et l'emprunt remboursé pour — E. La valeur totale de la position est donc encore nulle .La relation de parité Call-Put doit, par conséquent, être vérifiée à l'équilibre, situation dans laquelle aucun arbitrage n'est possible.

Black-Scholes Généralisé

La formule généralisées de Black et Sholes peux être utilisée pour évaluer une **option européenne** sur action classique, une option européenne sur action payant un dividende proportionnel, une option sur matières premières avec un coût de portage proportionnel, une option sur futur ainsi que des options de change.

$$Call_{BSG} = Se^{(b-r)T} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$

$$Put_{BSG} = Xe^{-rT} N(-d_2) - Se^{(b-r)T} N(-d_1)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(b + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$b = r$	donne la Formule de **Black et Scholes** (1973) **option européenne sur action sans dividendes**
$b = r - q$	donne la formule de **Merton** (1973) : **option européenne sur une action payant un dividende continu q ou sur une matière première avec coût de portage q.**
$b = 0$	donne la formule de **Black** (1976) : **option sur futur**
$b = r - r_f$	donne la formule de **Garman et Kohlagen** (1983) : **option sur taux de change**

avec

S	prix du sous jacent
X	prix d'exercice
T	échéance de l'option mesurée en année
r	taux sans risque domestique supposé constant dans le temps
r_f	taux sans risque foreign constant
σ	volatilité logarithmique du sous jacent supposée constante dans le temps
N	fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite

$$N(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Hypothèse du modèle

La loi du sous jacent du type : $\frac{dS_t}{S_t} = bdt + \sigma dW_t$ (W$_t$ est un brownien)

C'est à dire en intégrant : $S_T = S_t e^{\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\right)} = S_t e^{\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma u\sqrt{T-t}\right)}$

u est une variable aléatoire suivant une loi normale uniforme centrée réduite.

- **Pour les actions délivrant un dividende q** (éventuellement nul**) ou pour les matière première avec un coût de portage q**:

$$S_T = S_t e^{\left(\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\right)} = S_t e^{\left(\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma u\sqrt{T-t}\right)} = S_t e^{\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma u\sqrt{T-t}\right)}$$

où

$b = r - q$

- **Pour les devises**

Le taux de change (1 unité monétaire domestique vaut X unité monétaire foreign) : il suit la loi suivante en l'absence d'opportunité d'arbitrage :

$$X_T = X_t e^{\left(\left(r-r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\right)} = X_t e^{\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma u\sqrt{T-t}\right)}$$

$b = r - r_f$ et u (et –u symétrique) est une variable aléatoire suivant une loi normale uniforme centrée réduite.

- **Pour les futures (vrai pour tous les sous jacents précédents)**

$$F_t^T = S_t \times e^{(b)(T-t)}$$

En utilisant la formule précédentes pour 0<t$_1$<t<T

$$F_t^T = S_{t_1} e^{\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_1)+\sigma u\sqrt{t-t1}\right)} \times e^{(b)(T-t)} = S_{t_1} \times e^{(b)(T-t_1)} e^{\left(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_1)+\sigma u\sqrt{t-t1}\right)}$$

$$F_t^T = F_{t_1}^T e^{\left(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_1)+\sigma u\sqrt{t-t1}\right)} = F_{t_1}^T e^{\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_1)+\sigma u\sqrt{t-t1}\right)}$$

Où u est une variable aléatoire suivant une loi normale uniforme centrée réduite.
Donc on peut appliquer Black Scholes Généralisé sur le futur avec $b = 0$ en prenant comme valeur initiale

$$S = F_0^T = S \ \times e^{(b)(T)}$$

Les greeks

Delta : dérivée par rapport à S Sous jacent
Gamma : dérivée seconde par rapport à S

Vega : dérivées par rapport à la volatilité σ
Theta : dérivée par rapport à la maturité T
Rho : dérivé par rapport à r , le taux d'actualisation

Delta

$$\Delta Call = e^{(b-r)T} N(d_1)$$
$$\Delta put = e^{(b-r)T} \left(N(d_1)-1\right)$$

Gamma

$$\Gamma = \frac{d^2 c}{d^2 S} = \frac{d^2 p}{d^2 S} = \frac{n(d_1) e^{(b-r)T}}{S\sigma\sqrt{T}}$$

Véga

$$Vega = \frac{dc}{d\sigma} = \frac{dp}{d\sigma} = Se^{(b-r)T} n(d_1)\sqrt{T}$$

Théta

$$\theta_{call} = -\frac{dc}{dT} = -\frac{Se^{(b-r)T} n(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - (b-r)Se^{(b-r)T} N(d_1) - rXe^{-rT} N(d_2)$$
$$\theta_{put} = -\frac{dp}{dT} = -\frac{Se^{(b-r)T} n(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + (b-r)Se^{(b-r)T} N(-d_1) + rXe^{-rT} N(-d_2)$$

Rho

Pour un call

si $b \neq 0 \ \rho_{call} = \frac{dc}{dr} = TXe^{-rT} N(d_2)$

si $b=0 \ \rho_{call} = \frac{dc}{dr} = -T \times Call$

Pour un call

si $b \neq 0 \ \rho_{put} = \frac{dc}{dr} = -TXe^{-rT} N(-d_2)$

si $b=0 \ \rho_{put} = \frac{dc}{dr} = -T \times put$

Pourquoi calculer les greeks ?

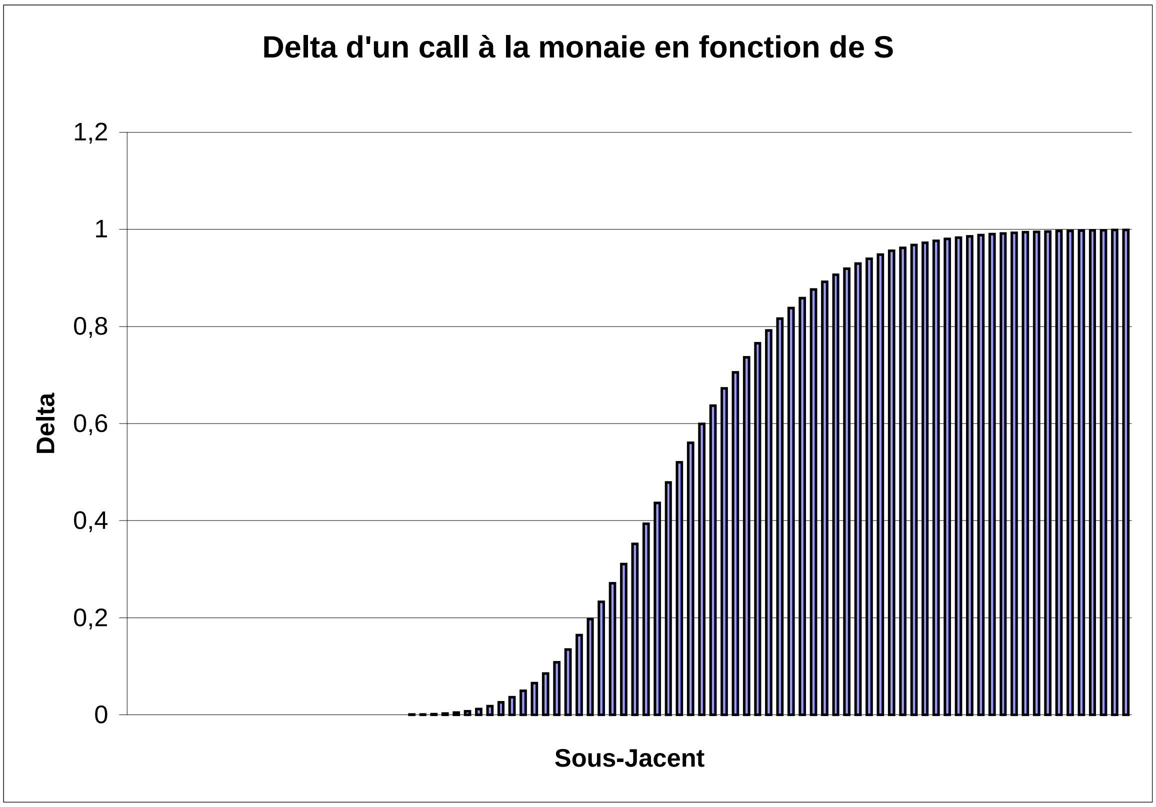
Pour le delta, il s'agit du nombre de call qu'il faut vendre pour couvrir un sous-jacent.

- Soit un portefeuille P contenant 1 Sous-jacent S et n call C. $P = S - nC$

Pour que le portefeuille soit couvert si S varie, en supposant tous les autres paramètres comme restant constants il faut que sa variation sur un cours instant soit nulle :

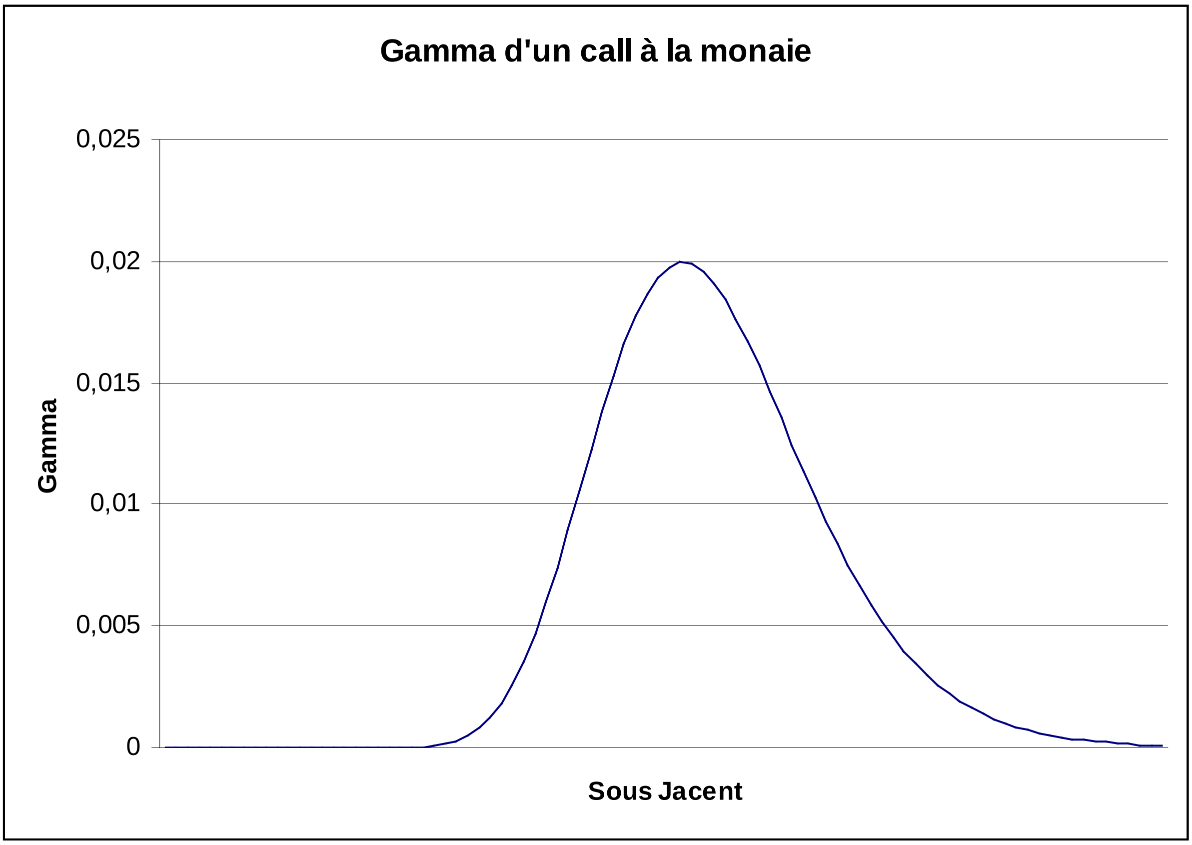
C'est à dire $0 = 1 - n\frac{dc}{dS}$ d'où $n = \frac{dc}{dS} = \Delta Call$

- Le delta des options est additif
- De façon générale, il est possible, en modifiant la composition d'un portefeuille d'options sur le même sous-jacent, d'obtenir n'importe quel niveau de sensibilité à la variation du support (c'est à dire n'importe quel degré de couverture)



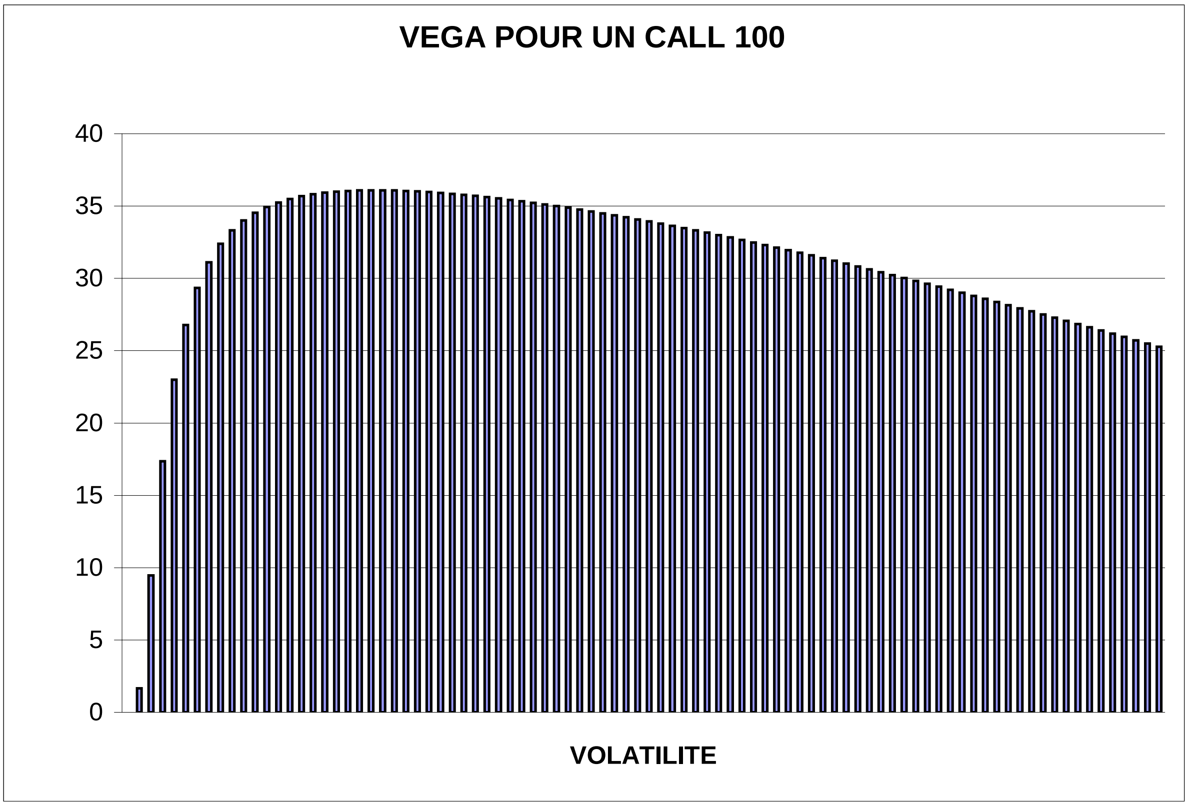
Le gamma est l'ajustement du nombre de call qu'il faut vendre pour couvrir le sous-jacent

- Ce nombre n n'est pas constant par rapport à S car d_1 dépend de S. Pour ajuster ce n en fonction des variations de S, il faut calculer la dérivée de n par rapport à S, c'est à dire Gamma.
- Le gamma est additif
- Le gamma est maximum pour les options à la monnaie.



Le vega est la sensibilité de la valeur de l'option à un changement de volatilité

- Contrairement à l'une des hypothèse du modèle de BS, la volatilité n'est pas constante, ni même déterministe.
- Le Véga est additif
- Un couverture est d'autant meilleur, toutes choses égales par ailleurs, que le Véga du portefeuille est proche de zéro (insensible au variations de la volatilité)
- Le Véga est maximum pour les options à la monnaie.



Le thêta

- Une autre source de modification de la valeur d'une position d'options est le passage du temps. Le thêta mesure la sensibilité de la valeur des options au passage du temps.

Le rho

- Il mesure l'influence du taux d'intérêt

Démonstration de Black-Scholes Généralisé

Hypothèse : le sous jacent suit la diffusion suivante :

$$S_T = S_t e^{\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma u\sqrt{T-t}\right)}$$

A l'échéance, le prix du call vaut $Max(S_T - K,0)$ mais comme S_T est variable, pour estimé aujourd'hui le gain , on doit calculer l'espérance de ce gain (c'est à dire la valeur « moyenne »). Cette valeur est équitable pour les deux contreparties.

Donc $C = E\left(e^{-rT}\max(S_T - K,0)\right) = E\left(e^{-rT}(S_T - K)1_{S_T>K}\right) = E\left(e^{-rT}(S_T)1_{S_T>K}\right) - e^{-rT}KP(S_T > K)$

$$P(S_T > K) = P\left(Se^{\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T)+\sigma u\sqrt{T}\right)} > K\right) = P\left(e^{\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T)+\sigma u\sqrt{T}\right)} > \frac{K}{S}\right) = P\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T)+\sigma u\sqrt{T} > Ln\frac{K}{S}\right)$$

$$= P\left(-u < \frac{Ln\frac{S}{K}+\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T)}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

SI U EST UNE LOI NORMALE CENTREE REDUITE, ALORS –U L'EST AUSSI. DONC

$$P(S_T > K) = N\left(\frac{Ln\frac{S}{K}+\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T)}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

PAR AILLEURS

$$E\left(e^{-rT}(S_T)1_{S_T>K}\right) = E(Se^{\left(\left(b-r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T)+\sigma u\sqrt{T}\right)}1_{S_T>K})$$

$$E\left(e^{-rT}(S_T)1_{S_T>K}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}(Se^{\left(\left(b-r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T)+\sigma u\sqrt{T}\right)}1_{S_T>K})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$E\left(e^{-rT}\left(S_T\right)1_{S_T>K}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ (Se^{\left(\left(b-r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T)+\sigma u\sqrt{T}\right)}1_{S_T>K})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

ON A VU QUE

$$S_T > K \Leftrightarrow u < \frac{Ln\frac{S}{K}+\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T)}{\sigma\sqrt{T}} = d2$$

DONC

$$E\left(e^{-rT}\left(S_T\right)1_{S_T>K}\right)=\int_{-\infty}^{d_2}\ (Se^{\left(\left(b-r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T)+\sigma u\sqrt{T}\right)})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$E\left(e^{-rT}\left(S_T\right)1_{S_T>K}\right)=Se^{((b-r)(T))}\int_{-\infty}^{d_2}\ (Se^{-\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma u\sqrt{T}-\frac{u^2}{2}\right)})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}du$$

$$E\left(e^{-rT}\left(S_T\right)1_{S_T>K}\right)=Se^{((b-r)(T))}\int_{-\infty}^{d_2}\ (Se^{\left(-\frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{t}-u\right)^2\right)})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}du$$

Changement de variable :

$v = \mathrm{u} - \sigma\sqrt{T}$

$$E\left(e^{-rT}\left(S_T\right)1_{S_T>K}\right)=Se^{((b-r)(T))}\int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{T}}\ (Se^{\left(-\frac{1}{2}(v)^2\right)})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}du$$

$$E\left(e^{-rT}\left(S_T\right)1_{S_T>K}\right)=Se^{((b-r)(T))}N\left(d_2+\sigma\sqrt{T}\right)=Se^{((b-r)(T))}N\left(d_1\right)$$

Calcul des greeks

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$\begin{aligned} d_2^2 &= d_1^2 - 2d_1\sigma\sqrt{T} + \sigma^2 T \\ &= d_1^2 - 2[\ln(S/X) + (b + \sigma^2/2)T] + \sigma^2 T \\ &= d_1^2 - 2\ln(Se^{bT}/X) \end{aligned}$$

$$n(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_2^2/2}$$

$$\begin{aligned} n(d_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2 + \ln(Se^{bT}/X)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} e^{\ln(Se^{bT}/X)} \\ &= n(d_1) Se^{bT}/X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} \\ n(d_1) &= n(d_2) X / Se^{bT} \end{aligned}$$

Partial Derivatives

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-z^2/2) dz$$

$$\frac{\partial N(x)}{\partial S} = n(x) \frac{\partial x}{\partial S}$$

Delta

$$
\begin{aligned}
\Delta_{call} = \frac{\partial c}{\partial S} &= e^{(b-r)T} N(d_1) + S e^{(b-r)T} \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} - X e^{-rT} \frac{\partial N(d_2)}{\partial S} \\
&= e^{(b-r)T} N(d_1) + S e^{(b-r)T} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial S} - X e^{-rT} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial S} \\
&= e^{(b-r)T} N(d_1) + S e^{(b-r)T} n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - X e^{-rT} n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S} \\
&= e^{(b-r)T} N(d_1) + S e^{(b-r)T} n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - X e^{-rT} n(d_1) S e^{bT} / X \frac{\partial d_1}{\partial S} \\
&= e^{(b-r)T} N(d_1) > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{put} = \frac{\partial p}{\partial S} &= X e^{-rT} \frac{\partial N(-d_2)}{\partial S} - e^{(b-r)T} N(-d_1) - S e^{(b-r)T} \frac{\partial N(-d_1)}{\partial S} \\
&= X e^{-rT} n(-d_2) \frac{-\partial d_2}{\partial S} - e^{(b-r)T} N(-d_1) - S e^{(b-r)T} n(-d_1) \frac{-\partial d_1}{\partial S} \\
&= X e^{-rT} n(-d_1) S e^{bT} / X \frac{\partial d_1}{\partial S} - e^{(b-r)T} N(-d_1) + S e^{(b-r)T} n(-d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} \\
&= -e^{(b-r)T} N(-d_1) < 0
\end{aligned}
$$

Gamma

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{call} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta_{call}}{\partial S} &= \frac{\partial e^{(b-r)T} N(d_1)}{\partial S} \\
&= \frac{n(d_1) e^{(b-r)T}}{S \sigma \sqrt{T}} > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{put} = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta_{put}}{\partial S} &= \frac{-\partial e^{(b-r)T} N(-d_1)}{\partial S} \\
&= \frac{n(d_1) e^{(b-r)T}}{S \sigma \sqrt{T}} > 0
\end{aligned}
$$

Vega

$$\begin{aligned}
Vega_{call} = \frac{\partial c}{\partial \sigma} &= Se^{(b-r)T}\frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} - Xe^{-rT}\frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma} \\
&= Se^{(b-r)T}n(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Xe^{-rT}n(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
&= Se^{(b-r)T}n(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Xe^{-rT}n(d_1)Se^{bT}/X\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
&= Se^{(b-r)T}n(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right] \\
&= Se^{(b-r)T}n(d_1)\sqrt{T} > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Vega_{put} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} &= Xe^{-rT}\frac{\partial N(-d_2)}{\partial \sigma} - Se^{(b-r)T}\frac{\partial N(-d_1)}{\partial \sigma} \\
&= Xe^{-rT}n(-d_2)\left[-\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right] - Se^{(b-r)T}n(-d_1)\left[-\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\right] \\
&= Se^{(b-r)T}n(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right] \\
&= Se^{(b-r)T}n(d_1)\sqrt{T} > 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \left[-\frac{\ln(Se^{bT}/X)}{\sigma^2\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sqrt{T}\right] - \left[-\frac{\ln(Se^{bT}/X)}{\sigma^2\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\sqrt{T}\right] = \sqrt{T}$$