Chapitre 4 : Statistiques appliquées à l'hydrologie

Plan

1. Terminologie et notions fondamentales
2. Caractéristiques d'une distribution
3. Analyse fréquentielle

1. Terminologie et notions fondamentales

L'analyse statistique permet de synthétiser l'information hydrologique représentée par des séries de mesure sur plusieurs années en quelques paramètres qui reflètent le phénomène étudié. L'analyse statistique consiste en la formalisation des données observées par une expression mathématique. Le problème consiste à choisir le modèle probabiliste qui représentera au mieux la série expérimentale. C'est l'ajustement théorique.

La série d'observation sera décrite par trois types de paramètres :

- Les valeurs centrales ;
- Les paramètres de dispersion ;
- Les caractéristiques de forme des courbes de fréquence.

Hypothèses de travail : Cette analyse suppose que l'échantillon a été choisi de manière aléatoire (variable aléatoire) et que les données utilisées sont homogènes (extraites d'une même population) et indépendantes.

1.1. Définitions

- Population : l'ensemble de toutes les observations dont on tire les échantillons
- Echantillon : observations $X_1, X_2, ..., X_n$ d'une variable aléatoire
- Evénement : l'occurrence d'une valeur spécifique d'une variable aléatoire.

1.2. Distribution d'une série statistique

Soit un échantillon de n observations décrivant une variable aléatoire X ($x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$).

Probabilité d'une variable

Une variable aléatoire peut être discrète ou continue. La probabilité d'une variable discrète est :

$$P(X=x) = p(x)$$

Elle est caractérisée par :

$$p(x) \leq 1$$
$$F(x) = p(X \leq x)$$

Lorsque la variable aléatoire est continue, on parle d'histogramme de fréquences ou polygone de fréquences.

a- Polygone des fréquences d'apparition

La construction d'un histogramme des fréquences de la variable X consiste à graduer l'axe des abscisses en valeur croissante de la variable étudiée et découpée en intervalles de classes. En ordonnée, on porte le nombre d'apparitions constatées dans chaque intervalle. On obtient ainsi un graphique en « escalier ».
Certaines règles doivent être observées :

- Nombre de classes : entre 5 et 20
- Largeur des classes : entre 0.25 et 0.5 * écart-type
- Si on dénote par *C* le nombre de classes : C = 1+3.3 log(n)

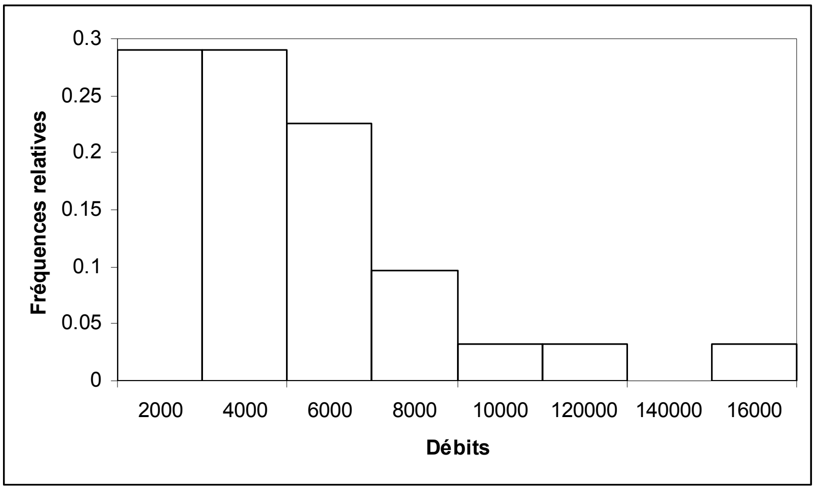


Figure 1 : Histogramme de fréquences d'un échantillon

b- courbe des valeurs classées

Ces courbes représentent :
En ordonnées : les valeurs observées, classées en ordre décroissant
En abscisse : la fréquence d'apparition de l'ensemble des valeurs supérieures à la valeur portée en ordonnée.
Ce sont des courbes qui permettent de donner le pourcentage de probabilité où une valeur observée a été égalée ou dépassée. Elles ont généralement l'allure d'un S horizontale.

c- La courbe de distribution des fréquences

On peut construire soit la distribution des fréquences cumulées au non dépassement soit la distribution des fréquences cumulées au dépassement.

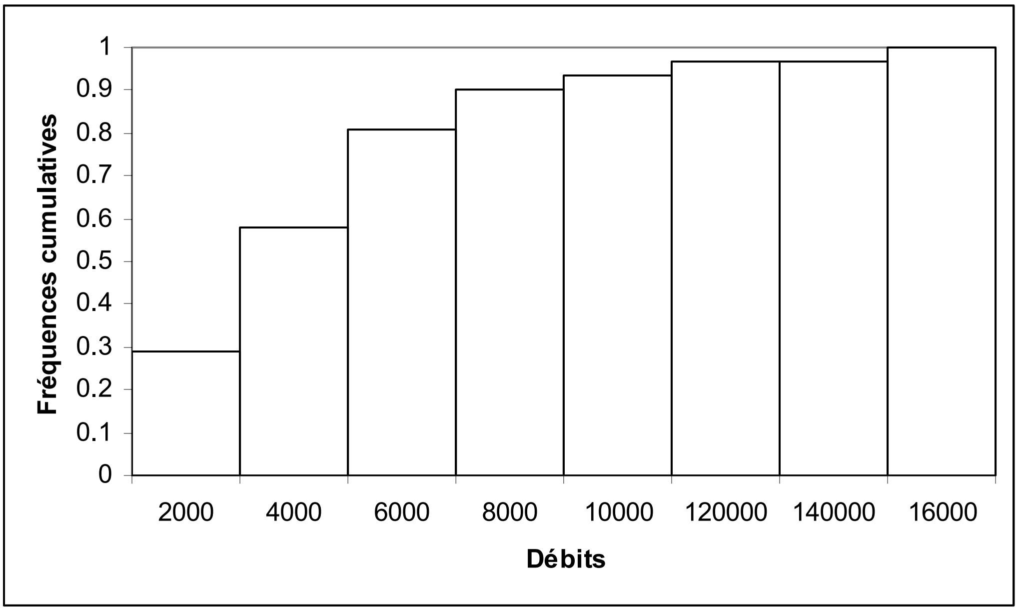


Figure 2 : Courbe de distribution des fréquences cumulées

La fonction de densité de probabilité :

Si la taille de l'échantillon devient grande et l'intervalle de classe te,d vers zéro, le polygone des fréquences relatives sera décrit par une courbe à laquelle est associée une fonction de distribution continue appelée fonction de densité de probabilité. Elle est notée f(x) et caractérisée par :

$$\int_{+\infty}^{-\infty} f(x)dx = 1$$

Ainsi l'effectif ou la fréquence d'apparition d'une valeur x_i deviendra la densité de probabilité $f'(x_i)$.

La fonction de répartition

Elle représente la probabilité de non dépassement :

$$p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x)$$

La probabilité pour que la variable soit comprise entre deux valeurs a et b est :

$$p(a \leq x \leq b) = p(b) - p(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

La probabilité au dépassement est :

$$p(X \geq x) = \int_{x}^{+\infty} f(x)dx = 1 - p(X \leq x)$$

En hydrologie on parle surtout de probabilité de dépassement (ou probabilité d'apparition) :

$$p(X \geq x) = 1 - F(x)$$

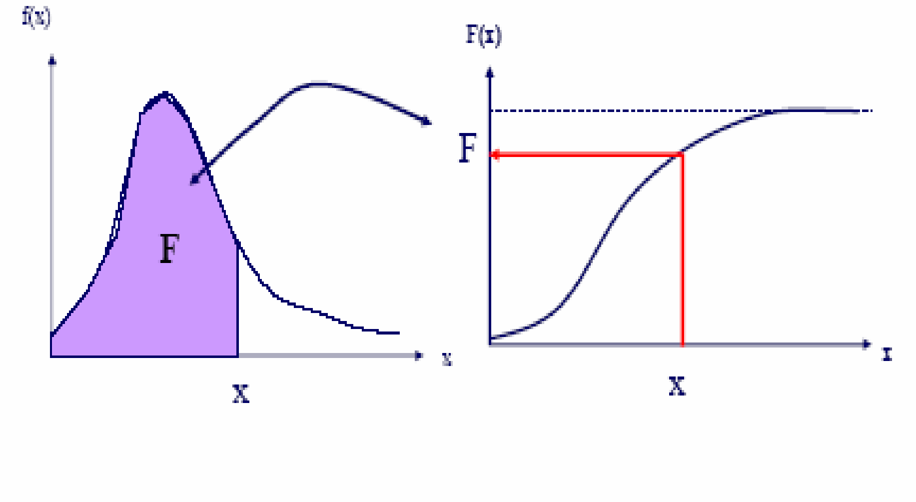


Figure 3 : Fonction de répartition

Probabilité d'apparition :

La probabilité d'apparition d'un phénomène est une notion importante pour le dimensionnement des structures conditionnées par un phénomène naturel. On définie l'intervalle moyen de récurrence, ou période de retour, par:

$$T = \frac{1}{P}$$

P : probabilité de dépassement ($p(X \geq x_T)$)

Exemple :

- un débit d'inondation dont la probabilité d'apparition ou de dépassement est de 0.033 est appelé crue de 30 ans (T=1/0.033)

Les intervalles de récurrence recommandés pour le dimensionnement de certaines structures sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau 1 : Périodes de récurrence recommandée pour certains ouvrages

Type d'ouvrage	**Période de récurrence (T) recommandée**
Déversoirs de barrage	500 à 1000 ans
Ponts	
Autoroutes	100 ans
Routes principales	50 ans
Routes secondaires	25 ans
Digues	100 ans
Plaines inondables	100 ans
Egouts pluvieux, fossés de drainage	5 à 10 ans
Egouts pluvieux de moindre importance	1 à 2 ans

Notions de risque :

Le concept de risque hydrologique est à la base du choix de la période de récurrence utilisée pour la conception d'ouvrages hydrauliques. Elle représente la probabilité qu'un critère de conception soit dépassé au moins une fois pendant la période de retour calculée (T) ;

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur x (probabilité pour qu'un événement se produise) pour la première fois dans les (k-1) prochaines années :
C'est le produit des probabilités de non apparition pendant (k-1) années et la probabilité d'apparition à la ($k^{ème}$) année :

$$p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{T}(1-\frac{1}{T})^{k-1}$$

On définit le risque hydrologique (R) comme étant la probabilité de dépassement de la valeur x_T au cours des k années de la vie d'un projet. La probabilité p_k que l'événement x se produise au moins une fois dans les (k) prochaines années : C'est la somme des probabilités d'apparition pendant les années 1, 2, 3, …..,k.

$$p_k = p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + ... + p(1-p)^{k-1} = 1-(1-p)^k$$

$$p_k = R = 1-(1-\frac{1}{T})^k$$

Exemple 1:

La probabilité d'apparition dans le 30 prochaines années (risque), d'un débit de valeur x dont l'intervalle de récurrence est T=100 ans:

$$p_{30} = 1-(1-\frac{1}{100})^{30} = 0.26$$

Pour un échantillon de 30 ans, il y a 26 sur 100 de chance (de risque) que cet échantillon contienne une valeur dont l'intervalle réel de récurrence est de 100 ans.

En spécifiant le risque, on peut déterminer la période de récurrence nécessaire.

Exemple 2:

Un risque de 10 % pour que la capacité d'un ouvrage ne soit pas dépassée durant les 25 prochaines années :

$$0.01 = 1-(1-\frac{1}{T})^{25}$$

La période de récurrence nécessaire est T =238 ans.

2. Caractéristiques d'une distribution

Une série statistique (échantillon) est caractérisée par trois types de paramètres :

1- les valeur centrales : (moyenne, mode, médiane)

2- les indices de dispersion :

- l'étendue (ou l'amplitude) : $w = x_{\max} - x_{\min}$
- la variance : $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
- le coefficient de variation : $C_v = \dfrac{s}{\overline{x}}$

3- Les caractéristiques de forme des courbes de fréquence.

- le coefficient d'asymétrie : $C_s = \dfrac{\dfrac{n}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{s^3}$

3. L'analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle est une méthode statistique de prédiction consistant à étudier les événements passés, caractéristiques d'un processus donné (hydrologique ou autre), afin d'en définir les probabilités d'apparition future. La figure 5 présente les étapes de l'analyse fréquentielle.

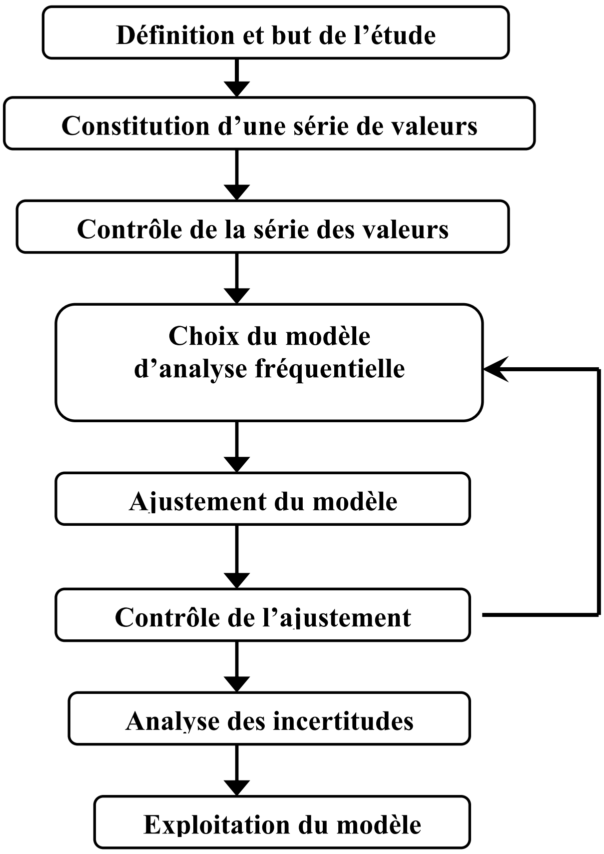


Figure 4 : Etapes de l'analyse fréquentielle.

La constitution d'échantillons, au sens statistique du terme, est un processus long, au cours duquel de nombreuses erreurs, de nature fort différente, sont susceptibles d'être commises. Par ailleurs, il est indispensable, avant d'utiliser des séries de données, de se préoccuper de leur qualité et de leur représentativité.

3.1. Analyse de fréquence :

Deux méthodes sont possibles pour effectuer l'analyse de fréquence :

- Méthode graphique
- Méthode analytique

Méthode graphique

C'est une méthode empirique qui consiste à placer sur un graphique les points constituant un échantillon donné, calculant pour chaque valeur sa fréquence expérimentale de dépassement ou de non dépassement.

Les étapes à suivre sont :

Classer les événements x_i par ordre décroissant et affecter à la plus grande valeur l'ordre 1

Calculer la fréquence expérimentale associée à chaque événement à l'aide de la formule générale:

$$p_m = \frac{m - \alpha}{n + 1 - 2\alpha}$$

p_m : probabilité de dépassement de la $m^{ème}$ valeur
m : le rang qu'occupe la valeur
n : le nombre d'observation
α : paramètre qui varie selon les auteurs (Voir tableau suivant)

Plusieurs formules sont présentées dans la littérature pour le calcul de la fréquence. La formule la plus utilisée est celle de Weibull pour laquelle α=0.

Tableau 4: Formules pour la détermination de la fréquence expérimentales pour la méthode graphique

Auteur	**Formule**	**A**
Hazen	$p_m \frac{m-0.5}{n}$	0.50
Weibull	$p_m = \frac{m}{n+1}$	0
Chegodayev	$p_m \frac{m-0.3}{n+0.4}$	0.30
Blom	$p_m = \frac{m-\frac{3}{8}}{n+\frac{1}{4}}$	0.375
Tukey	$p_m = \frac{m-\frac{1}{3}}{n+\frac{1}{3}}$	0.333
Gringorten	$p_m = \frac{m-0.44}{n+0.12}$	0.44
Cunnane	$p_m = \frac{m-0.4}{n+0.2}$	0.40

Après avoir classé les événements par ordre décroissant et Calculé la fréquence expérimentale associée à chaque événement :

- Choisir un papier à probabilité correspondant à la fonction de densité choisie (Normale, lognormal ou autre);
- Positionner les points expérimentaux sur le papier;
- Tracer une courbe d'ajustement à travers le nuage de points;
- Interpoler ou extrapoler pour trouver la fréquence d'un événement donné ou obtenir la valeur de l'événement correspondant à une probabilité donnée.

La méthode graphique présente l'avantage d'être facile d'utilisation et permet l'évaluation visuelle de l'ajustement d'une fonction de distribution donnée à l'échantillon. Néanmoins, elle manque de précision et ne permet pas la comparaison entre différentes distributions.

Méthode analytique :

L'équation générale est la suivante : $x = \bar{x} + \Delta x$

$\bar{x}$: Moyenne

Δx : Ecart par rapport à la moyenne, fonction des caractéristiques de dispersion de la distribution. Cet écart peut être égal à :

$$\Delta x = k \cdot s$$

k : Facteur de fréquence

s : Ecart type

$$x_T = \bar{x} + k_T \cdot s$$

Ou encore :

$$\frac{x_T}{\bar{x}} = 1 + k_T \cdot C_v$$

3.2. Choix du modèle fréquentiel

La validité des résultats d'une analyse fréquentielle dépend du choix du modèle fréquentiel et plus particulièrement de son type. Diverses pistes peuvent contribuer à faciliter ce choix, mais il n'existe malheureusement pas de méthode universelle et infaillible.
A partir de l'échantillon de n observations, l'histogramme de fréquence d'apparition, la courbe de fréquence cumulée de non dépassement sont construits.
Si le nombre n devient grand, on cherche la loi de distribution de la population. La fréquence devient densité de probabilité.

Tableau 5: Variables hydrologiques et les lois qui généralement s'y ajustent

Lois	Variables
Normale	Précipitations annuelles, Débits, Volume de stockage des réservoirs
Log Normale	Débits maxima annuels, Précipitations journalières, Précipitations annuelles, Volume du ruissellement mensuel, Volume du ruissellement annuel
Pearson type III (Gamma)	Débits maxima annuels, Précipitations journalières, Précipitations annuelles, Volume du ruissellement mensuel, Volume du ruissellement annuel
Loi de Gumbel et Fréchet	Débits maxima annuels
Loi exponentielle	Précipitations journalières, Durée entre deux événements
Loi de Goodrich	Valeurs moyennes annuelles (débits, précipitations, etc..

Les lois les plus utilisées en hydrologie sont la loi normale (loi de Gauss) et la loi de Gumbel.

Considérations théoriques

Loi normale

La loi normale se justifie, comme la loi d'une variable aléatoire formée de la somme d'un grand nombre de variables aléatoires. En hydrologie fréquentielle des valeurs extrêmes, les distributions ne sont cependant pas symétriques, ce qui constitue un obstacle à son utilisation. Cette loi s'applique toutefois généralement bien à l'étude des modules annuels des variables hydro-météorologiques en climat tempéré. La fonction de densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Les deux paramètres de cette distribution sont la moyenne m et l'écart type σ.
La fonction de densité f(x) se présente sous forme de courbe en cloche, symétrique par rapport à la moyenne m.
Si on opère le changement de variable suivant :

$$z = \frac{x - m}{\sigma}$$

La distribution devient :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{z^2}{2})$$

φ(z) est appelée « distribution normale réduite » et z « variable réduite ». C'est une loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1.

L'estimation de la moyenne de la distribution théorique (m) est la moyenne de l'échantillon ($\bar{x}$). L'estimation de l'écart type de la distribution théorique (σ) à partir d'un échantillon de taille n est :

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}}{n-1}}$$

A partir de l'expression de la variable réduite on peut écrire :

$$x = m + z \cdot \sigma$$

Le facteur de fréquence correspond donc à la variable réduite ($k_T = z_T$). L'équation de fréquence s'écrit :

$$x_T = \bar{x} + z_T \cdot s$$

x_T : la valeur de la variable pour une période de retour T.

Exemple :

Déterminons la valeur de la pluie pour la période de retour de 10 ans :

Moyenne : m=704 mm

Ecart type : s=252 mm

T = 10 ans :

$$P(Z \leq z) = 1 - 1/T = 1 - 1/10 = 0.9$$

La valeur de la variable réduite selon la table (par interpolation) est : z=1.28 donc k_{10}=1.28.

$$x_{10} = m + k_{10} \cdot s = 704 + 1.28 \cdot 252 = 1027 mm$$

Loi de Gumbel (distribution des valeurs extrêmes)

E.-J. Gumbel postule que la loi double exponentielle, ou loi de Gumbel, est la forme limite de la distribution de la valeur maximale d'un échantillon de n valeurs. Le maximum annuel d'une variable étant considéré comme le maximum de 365 valeurs journalières, cette loi doit ainsi être capable de décrire les séries de maxima annuels.

La fonction de répartition a la forme suivante :

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{(x-\beta)}{\alpha}}}$$

La variable réduite u de Gumbel est définie par :

$$u = \frac{x - \beta}{\alpha}$$

D'où ,

$$F(x) = e^{-e^{-u}}$$

Où α et β sont les paramètres de la loi. Le paramètre α est un paramètre caractéristique de la dispersion. On démontre que β est le mode (la valeur la plus probable).
L'estimation des paramètres peut être calculée par la méthode des moments:

$$\alpha = 0.78 \cdot s$$

$$\beta = \bar{x} - 0.45 \cdot s$$

s est l'écart type de l'échantillon ;
$\bar{x}$ est la moyenne de l'échantillon.
La variable réduite u de Gumbel se calcule par :

$$u = -Log(-Log(F)) \ ;$$

F étant la probabilité de non dépassement.
L'équation de fréquence la loi de Gumbel s'écrit:

$$x_T = \bar{x} + k_T \cdot s$$

Si la taille de l'échantillon est supérieure à 100, on peut démontrer en remplaçant α et β par leur valeurs dans l'équation de fréquence que:

$$k_T = -0.45 - 0.78 \cdot Log\left[-Log\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right]$$

Si la taille de l'échantillon est inférieure à100, le facteur k_T est obtenu à partir de valeurs tabulées en fonction de la taille de l'échantillon.

Distribution de Pearson (Gamma) Type III

La fonction de densité de probabilité de la loi de Pearson Type III à deux paramètres :

$$f(x) = \frac{1}{\lambda\Gamma(\beta)}\left(\frac{x-\gamma}{\lambda}\right)^{\beta-1} e^{\frac{-(x-\gamma)}{\lambda}}$$

α,β et γ sont des paramètres.

Si on introduit la variable u=x- γ dans l'équation précédente la loi Pearson III devient une distribution à deux paramètres.

Estimation des paramètres :

$$\beta = \left(\frac{2}{C_s}\right)^2$$

$$\lambda = \frac{s}{\sqrt{\beta}}$$

$$\gamma = \bar{x} + s\sqrt{\beta}$$

C_s est le coefficient d'asymétrie.

Equation de fréquence : $x_T = \bar{x} + k_T s$

Le facteur de fréquence kT peut être calculé selon la formule :

$$k_T = \frac{2}{C_s}\left\{\left[\frac{C_s}{6}\left(z-\frac{C_s}{6}\right)+1\right]^3 -1\right\}$$

Où z est la variable réduite de la loi normale correspondant à la période de retour T.

Si C_s=1 la loi Pearson III correspond à la loi normale.

Loi de Galton (Loi log-normale)

Lorsque les valeurs du logarithme d'une variable X suivent une distribution normale, on dit que la variable X suit une loi de Galton.
La loi log-normale est préconisée par certains hydrologues qui la justifient en argumentant que l'apparition d'un événement hydrologique résulte de l'action combinée d'un grand nombre de facteurs qui se multiplient.

Loi de Frechet

On dit qu'une variable suit une loi de Frechet si la variable log(X) suit une loi de Gumbel.

Il est à remarquer que plus le nombre de paramètres d'une loi est grand, plus l'incertitude dans l'estimation est importante. Pratiquement il est par conséquent préférable d'éviter l'utilisation de lois à trois paramètres ou plus.

3.3. **Contrôle de l'ajustement**

Il existe toujours des écarts entre les fréquences expérimentales des valeurs observées et les fréquences des mêmes valeurs calculées à partir d'une fonction de répartition quelconque. L'ajustement graphique est la première étape mais reste insuffisante pour le choix définitif de la loi théorique. Le test statistique d'adéquation consiste à comparer l'adéquation de plusieurs lois afin d'adopter le moins mauvais ajustement. Les tests les plus utilisés sont le test χ^2 et le texte de Kolmogorov Smirnov.

Le test d'adéquation de χ^2 :

Ce test permet de faire une comparaison entre la distribution empirique et la distribution théorique. Le principe consiste à faire l'hypothèse que les deux distributions ne différent pas. Si la probabilité qu'il en soit ainsi est faible, on rejette l'hypothèse et on conclura que la distribution théorique ne s'ajuste pas à l'échantillon étudié. Si au contraire cette probabilité est forte, la loi théorique sera acceptée.
Soit un échantillon de taille n ($x_1,x_2,\ldots..x_n$)
Hypothèse: H_o : $x_1,x_2,\ldots..x_n$ sont issus d'une population distribuée selon la loi de probabilité F(x) à p paramètres.

La mise en oeuvre consiste à subdiviser l'échantillon en k classes équiprobables, chacune ayant une probabilité théorique : P_i telle que $P_i = \frac{v_i}{n}$ où v_i est l'effectif théorique (nombre d'éléments) de chaque classe i.
En réalité l'effectif réel de chaque classe i est n_i, plus ou moins différent de v_i.
Le problème est de vérifier si l'écart entre les v_i et les n_i des différentes classes est significatif.
La vérification se fait par le calcul de la moyenne des carrées des écarts entre ces deux effectifs :

$$\chi^2_{calculé} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - v_i)^2}{v_i}$$

Cette quantité suit une loi χ^2 à μ degrés de liberté. Avec :

$$\mu = k - p - 1 \geq 1$$

Ce qui implique que $k \geq p+2$

Le test n'est significatif que si $v_i \geq 5$.

$\chi^2_{calculé}$ est comparée à une valeur tabulée, $\chi^2_{tabulé}$, fonction du nombre de degré de liberté et du seuil de signification α imposé en général à 5%.

Des tables donnant la loi $\chi^2_{tabulé}$ à la probabilité α de dépassement existent.
si $\chi^2_{calculé} > \chi^2_{tabulé,\mu}$ On rejette l'hypothèse nulle.
Si $\chi^2_{calculé} \leq \chi^2_{tabulé,\mu}$ la loi d'ajustement sera retenue.

Le test de Kolmogorov Smirnov

Ce test se base sur la fonction de répartition empirique $F_n(x)$ définie par :

$$F_n(x) = \frac{nombred'observations}{n} \leq x$$

La fonction théorique F(x) est comparée à l'échantillon selon le principe suivant :
On calcule la quantité D_n telle que :

$$D_n = \max_{i=1}^{n} |F(x_i) - F_n(x_i)|$$

Pour chaque événement x_i observé, on calcule sa fréquence théorique $F(x_i)$ et $F_n(x_i)$.
D_n est la valeur maximale de toutes les quantités calculées $|F(x_i) - F_n(x_i)|$. Le test repose sur la valeur de D_n. Si celle-ci est assez grande, la loi sera rejetée.

Le test consiste à calculer la quantité $D_{n,\alpha}$, fonction de la taille de l'échantillon n,et d'un seuil de risque imposé α sur des tables appropriées au test de Kolmogorov-Smirnov.
Si $D_n > D_{n,\alpha}$ alors l'hypothèse de validité est rejetée.

Intervalle de confiance

La valeur d'une variable estimée ne correspond pas à la vraie valeur qui ne peut être connue qu'avec un échantillonnage de dimension infinie. La notion d'intervalle de confiance représente un certain nombre de chances de trouver la vraie valeur du paramètre cherché. Son amplitude est d'autant plus grande que :

- Le degré de confiance choisi est grand
- La dispersion (écart) est grande
- La taille de l'échantillon est réduite

Le chois du degré de confiance dépend du risque que le projecteur accepte. Le degré est choisi d'autant plus élevé que l'on recherche la sécurité.

Valeurs communément admises :

- 95 % pour les projets importants économiquement et/ou exigeant une sécurité élevée

- 70 % pour les projets d'importance économique moindre et / ou n'exigeant pas une sécurité très poussée

Loi Normale

$x_T = \bar{x} + k_T s$

On peut montrer que la valeur x_T pour une période de retour T a α % de chance d'appartenir à l'intervalle :

$$\left|(x_T)_{\inf}, (x_T)_{\sup}\right|$$

Limite inférieure : $(x_T)_{\inf} = x_T - z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_{eT}$

Limite supérieure : $(x_T)_{\sup} = x_T + z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_{eT}$

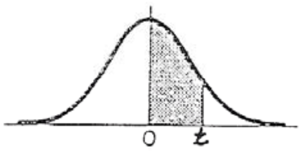
S_{eT} : Erreur standard pour une période de retour T estimée par : $S_{eT} = \frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{1+\frac{z_T^2}{2}}$

Loi de Gumbel

La valeur approximative de l'erreur standard : $S_{eT} \approx \frac{\delta}{\sqrt{n}} s$

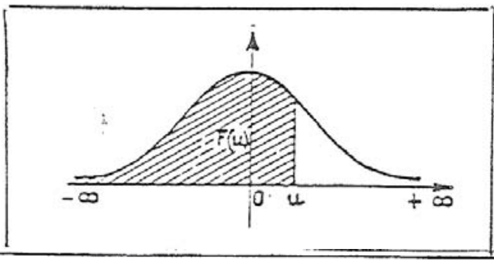
avec s : l'écart type et $\delta = \sqrt{1 + 1.14 k_T + 1.10 k_T^2}$

Aire sous la courbe normale $\Phi(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Fonction de répartition de la loi normale réduite
(probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9996
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Nota - La table donne les valeurs de $F(u)$ pour u positif. Lorsque u est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple

pour $u = 1,37$ $F(u) = 0,9147$

pour $u = -1,37$ $F(u) = 0,0853$

Fonction de répartition et de la fdp de la loi Gumbel

y	Cumulative probability function of extremes $\exp(-e^{-y}) = F(x)$	Density function of extremes. $\exp(-y-e^{-y})$
−3.0		.00000 00
−2.9	.00000 00	.00000 02
−2.8	.00000 01	.00000 12
−2.7	.00000 03	.00000 51
−2.6	.00000 14	.00001 91
−2.5	.00000 51	.00006 24
−2.4	.00001 63	.00017 99
−2.40	.00001 63	.00017 99
−2.35	.00002 79	.00029 29
−2.30	.00004 66	.00046 47
−2.25	.00007 58	.00071 89
−2.20	.00012 04	.00108 63
−2.15	.00018 69	.00160 46
−2.10	.00028 41	.00232 00
−2.05	.00042 31	.00328 56
−2.00	.00061 80	.00456 63
−1.95	.00088 61	.00622 81
−1.90	.00124 84	.00834 67
−1.85	.00172 97	.01100 04
−1.80	.00235 87	.01426 93
−1.75	.00316 82	.01823 15
−1.70	.00419 46	.02296 12
−1.65	.00547 82	.02852 48
−1.60	.00706 20	.03497 81
−1.55	.00899 15	.04236 34
−1.50	.01131 43	.05070 71
−1.45	.01407 84	.06001 78
−1.40	.01733 20	.07028 48
−1.35	.02112 23	.08147 77
−1.30	.02549 44	.09354 65
−1.25	.03049 04	.10642 20
−1.20	.03614 86	.12001 76
−1.15	.04250 25	.13423 10
−1.10	.04958 01	.14894 66
−1.05	.05740 34	.16403 90
−1.00	.06598 80	.17937 41
−0.95	.07534 26	.19481 41
− .90	.08546 89	.21021 95
− .85	.09636 17	.22545 23
− .80	.10800 90	.24037 84
−0.75	.12039 23	.25487 04
− .70	.13348 68	.26880 94
− .65	.14726 22	.28208 67
− .60	.16168 28	.29460 53
− .55	.17670 56	.30628 08
−0.50	.19229 56	.31704 19
− .45	.20839 66	.32083 10
− .40	.22496 18	.33560 36
− .35	.24193 95	.34332 85
− .30	.25927 69	.34998 72
−0.25	.27692 03	.35557 27
− .20	.29481 63	.36008 95
− .15	.31291 17	.36355 15
− .10	.33115 43	.35508 21
− .05	.34949 32	.36741 21
0.00	.36787 94	.36787 94
.1	.40460 77	.35610 42
.2	.44099 10	.36105 29
.3	.47672 37	.35316 56
.4	.51154 48	.34289 88
0.5	.54523 92	.33070 43
.6	.57763 58	.31701 33
.7	.60860 53	.30232 45
.8	.63805 62	.28609 71
.9	.66593 07	.27074 72
1.0	.69220 06	.25464 64
1.1	.71686 26	.23862 28
1.2	.73993 41	.22286 39
1.3	.76144 92	.20751 91
1.4	.78145 56	.19270 46

y	Cumulative probability function of extremes $\exp(-e^{-y})$	Density function of extremes $\exp(-y-e^{-y})$
1.5	.80001 07	.17850 65
1.6	.81717 95	.16498 57
1.7	.83303 17	.15218 12
1.8	.84764 03	.14011 40
1.9	.86107 93	.12879 04
2.0	.87342 30	.11820 50
2.1	.88474 45	.10834 26
2.2	.89511 49	.09918 16
2.3	.90460 32	.09069 45
2.4	.91327 53	.08285 05
2.5	.92119 37	.07561 62
2.6	.92841 77	.06805 69
2.7	.93500 30	.06283 74
2.8	.94100 20	.05722 24
2.9	.94648 32	.05207 75
3.0	.95143 20	.04736 90
3.1	.95595 04	.04306 48
3.2	.96005 74	.03913 41
3.3	.96378 87	.03554 76
3.4	.96717 75	.03227 79
3.5	.97025 40	.02929 91
3.6	.97304 62	.02658 72
3.7	.97557 96	.02411 98
3.8	.97787 76	.02187 59
3.9	.97996 16	.01983 63
4.0	.98185 11	.01798 32
4.0	.98185 11	.01798 32
4.2	.98511 63	.01477 24
4.4	.98779 77	.01212 75
4.6	.98999 85	.00995 13
4.8	.99180 40	.00816 23
5.0	.99328 47	.00669 27
5.2	.99449 36	.00548 62
5.4	.99549 36	.00449 62
5.6	.99630 90	.00368 42
5.8	.99697 70	.00301 84
6.0	.99752 43	.00247 26
6.2	.99797 26	.00202 53
6.4	.99833 98	.00165 88
6.6	.99864 06	.00135 85
6.8	.99888 68	.00111 25
7.0	.99908 85	.00091 11
7.2	.99925 37	.00074 60
7.4	.99938 89	.0006[illegible]
7.6	.99949 97	.00050 02
7.8	.99959 03	.00040 96
8.0	.99966 46	.00033 54
8.0	.99966 46	.00033 54
8.5	.99979 66	.00020 34
9.0	.99987 66	.00012 34
9.5	.99992 51	.00007 48
10.0	.99995 46	.00004 54
10.5	.99997 25	.00002 75
11.0	.99998 33	.00001 67
11.5	.99998 99	.00001 01
12.0	.99999 39	.00000 61
12.5	.99999 63	.00000 37
13.0	.99999 77	.00000 23
13.5	.99999 86	.00000 14
14.0	.99999 92	.00000 08
14.5	.99999 95	.00000 05
15.0	.99999 97	.00000 03
15.5	.99999 98	.00000 02
16.0	.99999 99	.00000 01
16.5	.99999 99	.00000 01
17.0	1,00000 00	.00000 00

Variables réduites pour Gumbel

Moyenne réduite $\bar{Y}_n$.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	.4952	.4996	.5035	.5070	.5100	.5128	.5157	.5181	.5202	.5220
20	.5236	.5252	.5268	.5283	.5296	.5309	.5320	.5332	.5343	.5353
30	.5362	.5371	.5380	.5388	.5396	.5402	.5410	.5418	.5424	.5430
40	.5436	.5442	.5448	.5453	.5458	.5463	.5468	.5473	.5477	.5481
50	.5485	.5489	.5493	.5497	.5501	.5504	.5508	.5511	.5515	.5518
60	.5521	.5524	.5527	.5530	.5533	.5535	.5538	.5540	.5543	.5545
70	.5548	.5550	.5552	.5555	.5557	.5559	.5561	.5563	.5565	.5567
80	.5569	.5570	.5572	.5574	.5576	.5578	.5580	.5581	.5583	.5585
90	.5586	.5587	.5589	.5591	.5592	.5593	.5595	.5596	.5598	.5599
100	.5600									
∞	.5772 = C = Constante d'Euler									

Ecart-type réduit $\bar{\sigma}_n$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0.9496	0.9676	0.9833	0.9971	1.0095	1.0206	1.0316	1.0411	1.0493	1.0565
20	1.0628	1.0696	1.0754	1.0811	1.0864	1.0915	1.0961	1.1004	1.1047	1.1086
30	1.1124	1.1159	1.1193	1.1226	1.1255	1.1285	1.1313	1.1339	1.1363	1.1388
40	1.1413	1.1436	1.1458	1.1480	1.1499	1.1519	1.1538	1.1557	1.1574	1.1590
50	1.1607	1.1623	1.1638	1.1658	1.1667	1.1681	1.1696	1.1708	1.1721	1.1734
60	1.1747	1.1759	1.1770	1.1782	1.1793	1.1803	1.1814	1.1824	1.1834	1.1844
70	1.1854	1.1863	1.1873	1.1881	1.1890	1.1898	1.1906	1.1915	1.1923	1.1930
80	1.1938	1.1945	1.1953	1.1959	1.1967	1.1973	1.1980	1.1987	1.1994	1.2001
90	1.2007	1.2013	1.2020	1.2026	1.2032	1.2038	1.2044	1.2049	1.2055	1.2060
100	1.2065									
∞	$1.28255 = \pi/\sqrt{6}$									

Période de retour en fonction de la variable réduite

Return period, years	Reduced variate
2	0.36665
5	1.4999
10	2.2502
25	3.1985
50	3.9019
100	4.6001
1000	6.907
10000	9.210

Loi du χ^2 à n degrés de liberté

Valeur limite de χ^2 correspondant à la probabilité α de dépassement

$\alpha = P(\chi^2_{calculé} > \chi^2_{tabulé})$

ddl	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001
1	$392704\cdot10^{-10}$	$157088\cdot10^{-9}$	$982069\cdot10^{-9}$	$393214\cdot10^{-8}$	0,0157908	0,1015308	0,454937	1,32330	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944	10,828
2	0,0100251	0,0201007	0,0506356	0,102587	0,210720	0,575364	1,38629	2,77259	4,60517	5,99147	7,37776	9,21034	10,5966	13,816
3	0,0717212	0,114832	0,215795	0,351846	0,584375	1,212534	2,36597	4,10835	6,25139	7,81473	9,34840	11,3449	12,8381	16,266
4	0,206990	0,297110	0,484419	0,710721	1,063623	1,92255	3,35670	5,38527	7,77944	9,48773	11,1433	13,2767	14,8602	18,467
5	0,411740	0,554300	0,831211	1,145476	1,61031	2,67460	4,35146	6,62568	9,23635	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496	20,515
6	0,675727	0,872085	1,237347	1,63539	2,20413	3,45460	5,34812	7,84080	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476	22,458
7	0,989265	1,239043	1,68987	2,16735	2,83311	4,25485	6,34581	9,03715	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777	24,322
8	1,344419	1,646482	2,17973	2,73264	3,48954	5,07064	7,34412	10,2188	13,3616	15,5073	17,5346	20,0902	21,9550	26,125
9	1,734926	2,087912	2,70039	3,32511	4,16816	5,89883	8,34283	11,3887	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5893	27,877
10	2,15585	2,55821	3,24697	3,94030	4,86518	6,73720	9,34182	12,5489	15,9871	18,3070	20,4831	23,2093	25,1882	29,588
11	2,60321	3,05347	3,81575	4,57481	5,57779	7,58412	10,3410	13,7007	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	26,7569	31,264
12	3,07382	3,57056	4,40379	5,22603	6,30380	8,43842	11,3403	14,8454	18,5494	21,0261	23,3367	26,2170	28,2995	32,909
13	3,56503	4,10691	5,00874	5,89186	7,04150	9,29906	12,3398	15,9839	19,8119	22,3621	24,7356	27,6883	29,8194	34,528
14	4,07468	4,66043	5,62872	6,57063	7,78953	10,1653	13,3393	17,1170	21,0642	23,6848	26,1190	29,1413	31,3193	36,123
15	4,60094	5,22935	6,26214	7,26094	8,54675	11,0365	14,3389	18,2451	22,3072	24,9958	27,4884	30,5779	32,8013	37,697
16	5,14224	5,81221	6,90766	7,96164	9,31223	11,9122	15,3385	19,3688	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	34,2672	39,252
17	5,69724	6,40776	7,56418	8,67176	10,0852	12,7919	16,3381	20,4887	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7185	40,790
18	6,26481	7,01491	8,23075	9,39046	10,8649	13,7867	17,3379	21,6049	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	37,1564	42,312
19	6,84398	7,63273	8,90655	10,1170	11,6509	14,5620	18,3376	22,7178	27,2036	30,1435	32,8523	36,1908	38,5822	43,820
20	7,43386	8,26040	9,59083	10,8508	12,4426	15,4518	19,3374	23,8277	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968	45,315
21	8,03366	8,89720	10,28293	11,5913	13,2396	16,3444	20,3372	24,9348	29,6151	32,6705	35,4789	38,9321	41,4010	46,797
22	8,64272	9,54249	10,9823	12,3380	14,0415	17,2396	21,3370	26,0393	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894	42,7956	48,268
23	9,26042	10,19567	11,6885	13,0905	14,8479	18,1373	22,3369	27,1413	32,0069	35,1725	38,0754	41,6384	44,1813	49,728
24	9,88623	10,8564	12,4011	13,8484	15,6587	19,0372	23,3367	28,2412	33,1963	36,4151	39,3641	42,9798	45,5585	51,179
25	10,5197	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	19,9393	24,3366	29,3389	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141	46,9278	52,620
26	11,1603	12,1981	13,8439	15,3791	17,2919	20,8434	25,3364	30,4345	35,5631	38,8852	41,9232	45,6417	48,2899	54,052
27	11,8076	12,8786	14,5733	16,1513	18,1138	21,7494	26,3363	31,5284	36,7412	40,1133	43,1944	46,9630	49,6449	55,476
28	12,4613	13,5648	15,3079	16,9279	18,9392	22,6572	27,3363	32,6205	37,9159	41,3372	44,4607	48,2782	50,9933	56,892
29	13,1211	14,2565	16,0471	17,7083	19,7677	23,5666	28,3362	33,7109	39,0875	42,5569	45,7222	49,5879	52,3356	58,302
30	13,7867	14,9535	16,7908	18,4926	20,5992	24,4776	29,3360	34,7998	40,2560	43,7729	46,9792	50,8922	53,6720	59,703
40	20,7065	22,1643	24,4331	26,5093	29,0505	33,6603	39,3354	45,6160	51,8050	55,7585	59,3417	63,6907	66,7659	73,402
50	27,9907	29,7067	32,3574	34,7642	37,6886	42,9421	49,3349	56,3336	63,1671	67,5048	71,4202	76,1539	79,4900	86,661
60	35,5346	37,4848	40,4817	43,1879	46,4589	52,2938	59,3347	66,9814	74,3970	79,0819	83,2976	88,3794	91,9517	99,607
70	43,2752	45,4418	48,7576	51,7393	55,3290	61,6983	69,3344	77,5766	85,5271	90,5312	95,0231	100,425	104,215	112,317
80	51,1720	53,5400	57,1532	60,3915	64,2778	71,1445	79,3343	88,1303	96,5782	101,879	106,629	112,329	116,321	124,839
90	59,1963	61,7541	65,6466	69,1260	73,2912	80,6247	89,3342	98,6499	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	137,208
100	67,3276	70,0648	74,2219	77,9295	82,3581	90,1332	99,3341	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169	149,449

Valeurs critiques du test de Kolmogorov-Smirnov

Dimension de l'échantillon (N)	Niveau de signification				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	.684	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.829
4	.494	.525	.564	.624	.734
5	.446	.474	.510	.563	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.411	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	.322	.342	.368	.409	.486
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	.375	.450
13	.284	.302	.325	.361	.433
14	.274	.292	.314	.349	.418
15	.266	.283	.304	.338	.404
16	.258	.274	.295	.328	.391
17	.250	.266	.286	.318	.380
18	.244	.259	.278	.309	.370
19	.237	.252	.272	.301	.361
20	.231	.246	.264	.294	.352
25	.21	.22	.24	.264	.32
30	.19	.20	.22	.242	.29
35	.18	.19	.21	.23	27
40				.21	.25
50				.19	.23
60				.17	.21
70				.16	.19
80				.15	.18
90				.14	
100				.14	
Formule asymptotique	$\frac{1.07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{N}}$